出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(12)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.234-245、2005年3月

放物線の定義の指導に関する授業研究
－ユークリッド原論と折り紙を題材として－

筑波大学大学院修士課程教育研究科
常國　敬太郎

章構成

1. はじめに
2. 研究目的・研究方法
3. 「折り紙による二次曲線」の教材化
4. 「折り紙による二次曲線」の解説
5. 「折り紙による二次曲線」の授業概要
6. 考察
7. おわりに

要約

本研究では、放物線の定義の指導において、生徒の主体的な学習態度を重視する立場から、幾何学的な解法と身近な教材に注目し教材開発・授業実践を行った。また、礒田(2002)の述べる解釈学的営みに基づき、古代ギリシア時代の数学を紹介し、生徒が異文化体験をすることも重視した。

その結果、多くの生徒から数学に対する興味・関心の高まりや数学に積極的に取り組む姿勢が確認された。さらに、日常と数学の関わりを感じる生徒も見られた。

キーワード：解釈学的営み、放物線、折り紙、数学史、ユークリッド原論

１．はじめに

平成１５年度から施行された高等学校学習指導要領には、数学Ｃの内容に「幾何的な定義に基づいて放物線の方程式を導き、焦点、準線及び放物線の性質について理解させる。」との記述があり、放物線は「座標平面上の定点 F(p,0)と、F を通らない定直線 l(x=-p)までの距離が等しい点の軌跡として」定義されている。しかし筆者は、放物線が焦点と準線で定義されているために、授業では具体的な事象との結びつきが扱われず、放物線の定義について抽象的なイメージしか抱いていない生徒が多く、また、座標平面と方程式による代数的な学習が重視され、「幾何的な」学習は軽視される傾向にあると考える。筆者は、生徒が持つ放物線の定義に対する具体的なイメージの広がりが重要だと考え、「幾何的な」学習による理解を重視する必要があると考える。

また、礒田(2001)は、「異文化体験」が自らの無意識的な数学文化を自覚させる行為であり、「数学を人の文化的営みとして理解し、数学観の変容を促す」(礒田,2001,p.39)ことに貢献すると述べ、そのためには「文化比較に通じる課題設定をした上で、他者の身になって考えてみる、他者の世界において考えてみることが有効な方策となる」(礒田,2001,p.46)と述べている。

以上より、筆者は幾何学を重視する立場と解釈学的営みを重視する立場から、定木とコンパスを有限回用いる数学として発展した古代ギリシア時代の数学を教材として取り上

げた。さらにそれを解釈する道具として折り紙を用いた。折り紙を用いた理由として、生徒にとって幼少期から親しんできたものであり、日常との関わりを感じやすい身近なものと考えられるからである。また、その身近なものから数学を見出すことができ、一見、点と直線しか存在しない折り紙から放物線という曲線が発見できるという生徒の驚きも予想できる、という点も理由の１つである。

本授業実践を通して行われる解釈学的営みによって、生徒の数学観が変容するか。また、日常の中に発見することができる数学を学習することによって、数学を有用なものとして捉え、自ら学び自ら考える主体的な学習態度を育成することができるかを考察していく。

２．研究目的・研究方法

（１）研究目的

古代ギリシア時代の数学と、折り紙に見られる数学を取り入れた授業を通して、生徒の数学観が変容するかを考察する。

上記の目的を達成するため、以下の課題を設定する。

課題１：折り紙という日常的な教材を使用することによって、生徒の自ら学び自ら考える主体的な学習態度を育成することができるか。

課題２：生徒は、本授業を通して行われる解釈学的営みによって、数学観が変容するか。

（２）研究方法

古代ギリシア時代の数学と折り紙を題材としたオリジナルのテキストを開発し、それを用いて授業を実践する。そして、事前・事後アンケートとビデオによる授業記録を基に考察する。

３．「折り紙による二次曲線」の教材化

古代ギリシア時代に、アテネを中心に数学は科学として、又、文化として発展した。このギリシア時代の数学は定木とコンパスを有限回使用して作図するという数学として発展した。その背景として、実在するものが真実であるというこの時代のギリシア人の考え方が影響していたといわれている。しかし、この方法では解けない問題も存在した。特に「立方体の倍積」「角の三等分」「円の平方化」の３つの問題はギリシア三大作図問題と呼ばれ、ギリシア人は熱心にこの問題に取り組んだが、ついに解かれることはなかった。後の時代の様々な数学者が取り組んだ結果、いくつかの解法が考え出されたが、しかし、これは定木とコンパスを有限回用いて作図するという条件に反していた。立方体の倍積と角の三等分には立方根の作図が必要になるのだが、最終的に、1837 年 P.-L.Wantzel(1814~1848)によって、定木とコンパスを有限回用いて作図することは不可能であることが証明された。

本研究では立方体の倍積問題を取り上げ、折り紙で放物線の接線及び２つの放物線の共通接線が折れることに注目した。授業の大まかな流れとしては以下のようになる。

①古代ギリシア時代の数学の集大成といわれるユークリッド原論を紹介し、当時の数

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(12)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.234-245、2005年3月

学を体験する。

②ユークリッド原論を折り紙で解釈し、さらに折り紙の独自の方法（放物線の共通接線を折ること）を加える。

③放物線の共通接線の傾きを代数学で導き、この傾きを使うことによって立方体の倍積問題が解けることを学習する。

この流れの中で、生徒は古代ギリシア時代の数学という異文化を体験し、折り紙という新たな文化で異文化を解釈し、さらにそれを自らの文化である代数学で解釈する。本研究は以上のような他者の立場に立ち、自らの文化を見つめなおす解釈学的営みを重視した。また、生徒が自ら積極的に考察することを促すために生徒が実際に作業する時間を十分取れるよう配慮した。

４．「折り紙による二次曲線」の教材化

（１）折り紙による放物線の接線の折り方

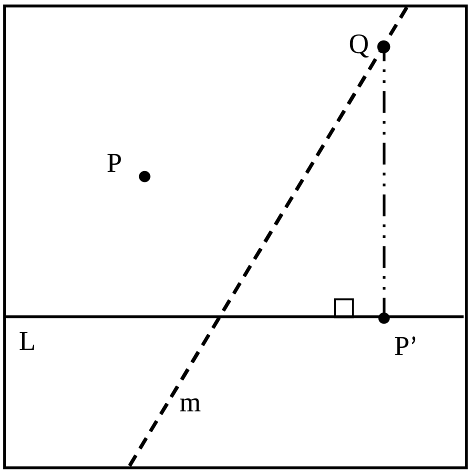

図１

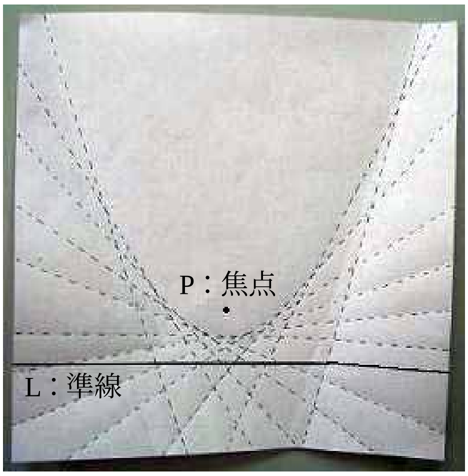

図２

【放物線の接線】

図１において、任意の点 P が任意の直線 L に重なるよう折ったとき、できた折り目（波線 m）が焦点を P、準線を L とする放物線の接線になる。P が P’に重なる場合、Q はその接点となる。図２は実際に数回折り紙で折り、折り目を波線で書いたものである。

【証明方法】

任意の点 P を任意の直線 L に重なるように折り、できた折り目を波線 m とする。このとき P が P’に重なる場合を考える。P’を通るように L の垂線をとり、m との交点を点 Q とする。折り紙の性質から m は線分 PP’の垂直二等分線になるので、PQ=P’Q となり、放物線の定義から Q は放物線上の点になる。

次に、m が Q 以外の点でも放物線と交わると仮定すると矛盾が生じ、背理法により、m は点 Q のみで交わることが導ける。

したがって m は点 P を焦点、直線 L を準線とする放物線の接線になる。

（２）折り紙による２つの任意の放物線の共通接線の折り方と共通接線の傾きの計算

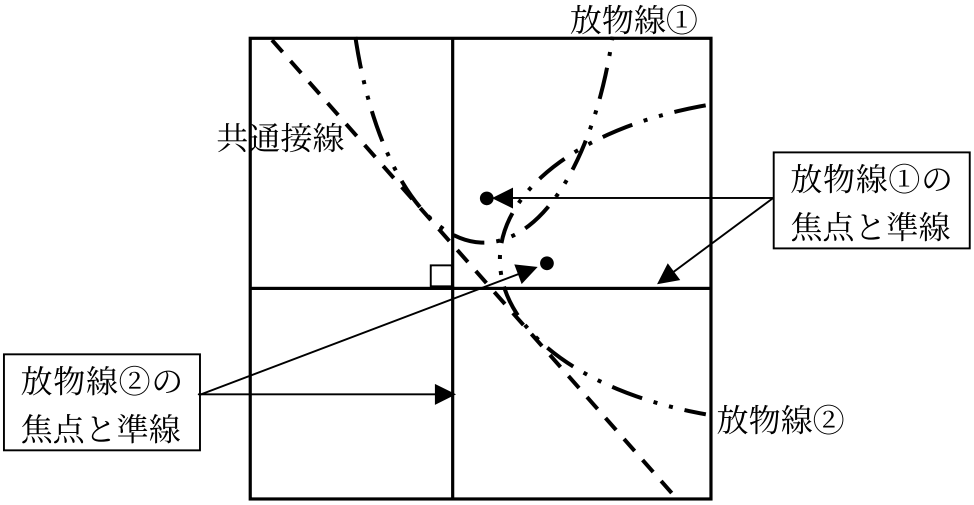

図３

【共通接線】

図３のように放物線①と②の焦点と準線をとり、それぞれの焦点と準線同士が同時に重なるように折る。上記ｉより、できた折り目（波線）は放物線①と②の共通接線となる。また、放物線①と②は実際には表せないが、便宜上、長２点鎖線で表記した。

【共通接線の傾き】

放物線①を　$y_1 = x^2/2a$　、放物線②を　$y_2 = \pm\sqrt{2bx}$　とする。

$x = t$　での　y_1　の接線の方程式は　$y_s = \dfrac{1}{a}t * x - \dfrac{1}{2a}t^2$　となる。

$y_2 = y_s$　とし、式を整理すると　$\dfrac{t^2}{a^2} * x^2 - \left(\dfrac{t^3}{a^2} + 2b\right) * x + \dfrac{t^4}{4a^2} = 0$　となる。

共通接線なので、判別式：$B^2 - 4AC = 0$　となり、

式を整理すると　$t = -\sqrt[3]{a^2 b}$　となる。

従って共通接線の傾きは　$\dfrac{t}{a} = -\dfrac{\sqrt[3]{a^2 b}}{a} = -\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$　となる。

ここで、$a = 1,\quad b = 2$ を代入すると傾きは－２の立方根となる。

したがって、折り紙で２の立方根を折ることができる。

５．「折り紙による二次曲線」の授業概要

（１）授業環境

日時：平成 16 年 12 月 7 日、14 日、15 日（計 45 分×3 回）

対象：栃木県公立高校２学年（43 名）

準備：コンピュータ（Windows）、プロジェクタ、実物投影機、Microsoft Power Point、折り紙、定規、コンパス、Cabri GeometryⅡ、授業テキスト、事前・事後アンケート

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(12)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.234-245、2005年3月

（2）授業展開

１時間目

目標：現在の数学と古代ギリシア時代の数学の違いに気づく。時代を超えて探求され続けた問題（ギリシア三大作図問題）の存在を知る。

【授業の流れ】

①ギリシア数学の紹介

授業者は、ギリシア数学における作図の存在を定義し、ギリシア時代の数学の研究をまとめたユークリッドとその著書、ユークリッド原論(図４)を紹介した。そして、「ギリシア時代では数学の問題を定木とコンパスのみを使って解いていた。」ということを伝えた。ここで、定規と定木の違いについて触れ、定木とはただ直線を書くことのみができるものということを確認した。

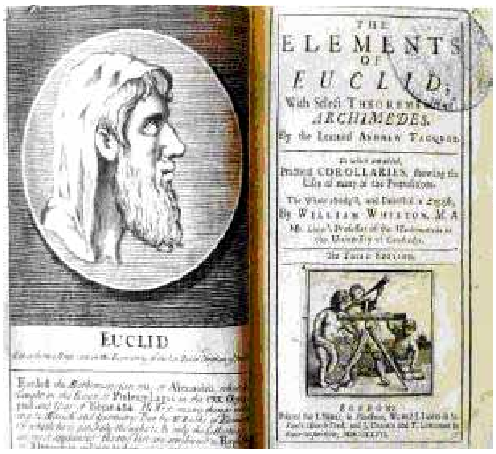

図４：ユークリッド原論

②ギリシア数学に触れる

ユークリッド原論の問題（本研究では比例中項を作図し、図５の BD が比例中項になることを証明する問題とした）を解いてもらった。ここでは生徒も実際に定木とコンパスを使って図の図形を作図した。その後問題の証明をした。生徒一人が前に出て黒板に作図し、作図手順を説明した。次に、授業者が別の生徒一人を指名し証明をしてもらった。

この問題では、AB:BD=BD:BC となり、BD の長さは AB×BC の平方根になる。授業者は、定木とコンパスのみを使って任意の数の平方根が作図できることを強調し、ギリシアの数学者たちの作図を確認した。

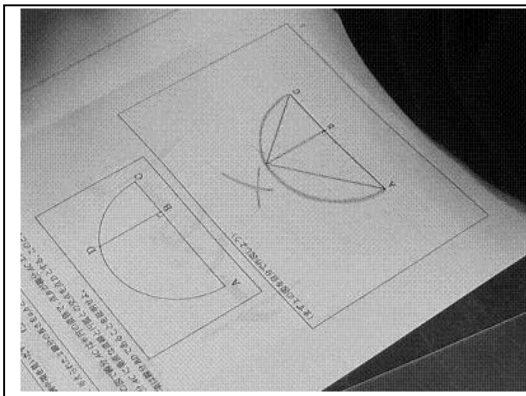
図５：生徒が作図した比例中項

また、ユークリッド原論における公準を示し、

公準（要請）

次のことが要請されているとせよ。

1．任意の点から任意の点へ直線をひくこと。
2．および有限直線を連続して一直線に延長すること。
3．および任意の点と距離(半径)とをもって円を描くこと。
4．およびすべての直角はお互いに等しいこと。
5．および 1 直線が 2 直線に交わり同じ側の内角の和を 2 直角より小さくするならば、この 2 直線は限りなく延長されると 2 直角より小さい角のある側において交わること。

『ユークリッド原論　第 1 巻』より

これが定木とコンパスのみを使う作図で認められているということを伝えた。
③ギリシア三大作図問題の紹介
　授業者は、ギリシア人は定木とコンパスのみを使って様々な問題を解くことができたことを強調しながらも、それだけでは解けなかった問題であるギリシア三大作図問題を示し、これら３つの問題はギリシア人だけではなく、それから２千年以上も多くの数学者によって取り組まれ、長い間解くことができなかったことを伝えた。
④立方体倍積問題の紹介
　授業者は、今後の授業で立方体倍積の解法を探求していくことを伝えた。ここで、与えられた正方形の面積を２倍にする作図を宿題として提示した。
　正方形の面積の２倍には２の平方根の作図が必要なことを口頭及び黒板で確認し、立方体の体積の２倍には何の作図が必要なのかを問いかけた。生徒数名に解答を求め、２の立方根の作図が必要なことを確認した。次に、1837 年に P.-L.Wantzel が定木とコンパスのみでは立方根の作図が不可能なことを証明したことを伝えた。ここではその証明については触れず、事実のみを伝えた。
　最後に、今時のまとめを行い、今後は折り紙による立方体倍積問題の解法を探求していくことを伝えた。

２時間目

目標：古代ギリシアとは全く異なった方法（折り紙）でもユークリッド原論の問題が解けることを理解する。
【授業の流れ】
①宿題の解答と前回の復習
　生徒に挙手を求め、与えられた正方形の面積を２倍にする作図を、対角線を用いて作図する方法と、比例中項を用いて作図する方法（図６：Cabri GeometryⅡ、BD が BC の平方根となる）の２通りで解いた生徒がいることを確認し、黒板で解答を行った。ここで、授業者は比例中項を用いて解いた生徒を前回の授業をよく理解したものとして、他の生徒の拍手を求めた。

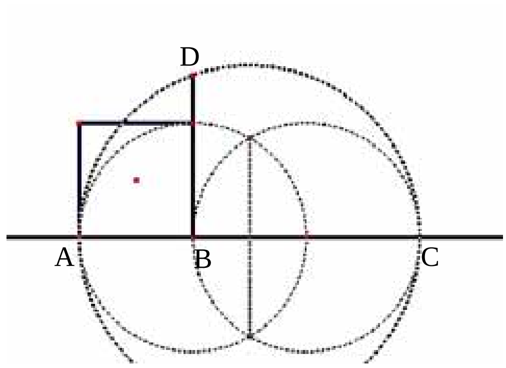

図６：正方形の面積の２倍

　次に、前回の内容をより定着する理由でユークリッド原論の公準を Cabri GeometryⅡを用いて確認した。また、ユークリッド原論が公準を基にして展開されていることを再度強調した。
②公準を折り紙で表す
　時間を与え、生徒全員に折り紙を使ってユークリッド原論の公準を折り紙で表す活動をしてもらった（図７）。しかし、公準３（円）は折り


図７：生徒の活動風景

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(12)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.234-245、2005年3月

紙で折ることはできない。そのような問題点が現れれば授業資料に書き込むよう伝えた。ここでは授業者と生徒の間に以下のようなやりとりがあった。

【やりとり１】

生徒Ａ：「公準３が折れません。」

授業者：「へー。じゃあそうかもしれないね。」

生徒Ａ：「えっ？それじゃ、ダメじゃないですか？」

授業者：「うん。でもね、折れないけど、折れるんだよ。わかるかな？」

生徒Ａ：「・・・。（しばらくして）どういうことですか？」

授業者：「ちょっとずるいと思うかもしれないけど、要は考え方だよ。あとで説明するね。だから公準３はとばして、先に４と５からやってみて。」

生徒の活動がだいたい終わってから、授業者は円を折り紙で折れるという考え方を口頭で伝え、授業資料に書き込むように伝えた。それは、「作業を繰り返すことによって任意の点から任意の距離離れた点を多くとることができる。つまり完全な円を折ることはできないが、多くの点がとれることを円が折れるということにする。」という考え方である。生徒には、これは折り紙における公準（要請）のような決まりごとであることを伝えた。

③ユークリッド原論と折り紙の関係

授業者は、ユークリッド原論の公準が全て折り紙で表せたことを確認し、それがなにを意味するのかを示していった。それは、ユークリッド原論の問題は全て折り紙で解くことができるということである。PowerPoint で示し、授業資料に書き込むよう伝えた。

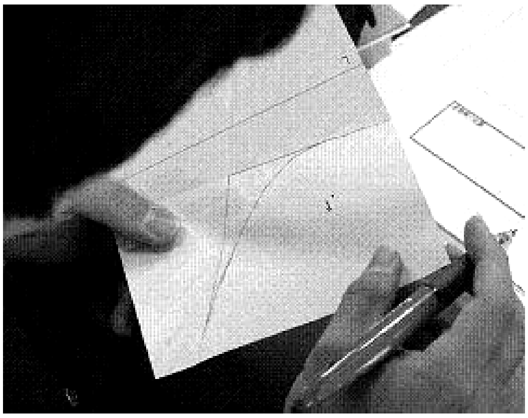

図８：生徒が折った放物線の接線

④折り紙で放物線の接線を折る

授業者は生徒に、折り紙上に任意の点と任意の直線を書くよう伝え、その点が直線に重なるように折る作業を行ってもらった。この時点ではまだどのようなかたちが現れるかを伝えず、作業を繰り返すと特徴的なかたちが現れてくることのみを伝えた。そして、比較的きれいに折れている生徒数名に結果を尋ねた。ここでは残念だが、生徒から放物線という答を導くことができなかった。しかし「円」と答えた生徒や「曲線」と答えた生徒がいたことから、生徒が自らの力で放物線を見つけるのに、もう少しのところまできていたと考えられる。以下は授業者が主体で示していった。折れ線は PP’の垂直２等分線になること（４章参照）を伝え、Cabri GeometryⅡ(図９)で示した。

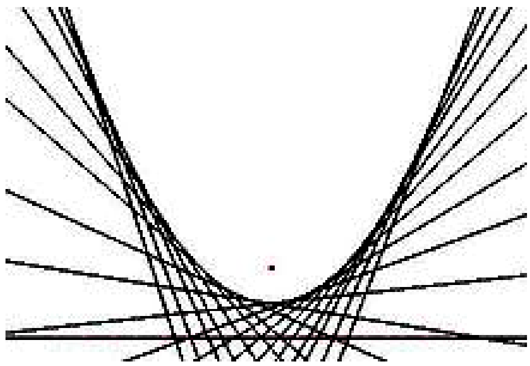

図９：Cabri GeometryⅡで
作図した折り目

生徒から、現れた直線が二次関数ではないかという意見が出たので、次回の授業ではなぜ二次関数（放物線）が現れるかを証明することを伝えた。

３時間目

目標：焦点と準線から放物線が定まることを理解し、２つの放物線の共通接線を折り、その傾きを代数的に求めることで、立方体倍積問題が折り紙で解けることを理解する。

【授業の流れ】

①前回の復習と放物線であることの証明

前回の復習として、現れたかたちが放物線のように見えることを Cabri GeometryⅡを用いてより詳しく示し、確認した。また、このかたちが放物線であることを証明する方法として、放物線の定義を伝え、授業資料に書き込んでもらった。放物線の定義は数Ｃの範囲なので、ここでは伝えるだけにとどめた。次に実際に放物線であることの証明を行っていった。穴埋め式の問題を、生徒を指名しながら解いた。証明を終えたあと、Cabri GeometryⅡを用いて放物線の定義通りに作図し、軌跡をとって放物線を描いた（図１０）。ここでは授業者と生徒の間に以下のようなやりとりがあった。

【やりとり２】

授業者：「カブリで定義通りに放物線を描いてみるよ。ほら、どうかな？」

生徒Ｂ：「うんうん（頷く)。」

授業者：「折り紙を使って放物線の接線を描くことができるんだよ。頑張れば放物線そのものを描くこともできるし。どう？すごくない？すごいと思うんだけどなぁ。」

生徒Ｂ：「すげーよなぁ（笑いながら隣同士で顔を見合わせる)。」

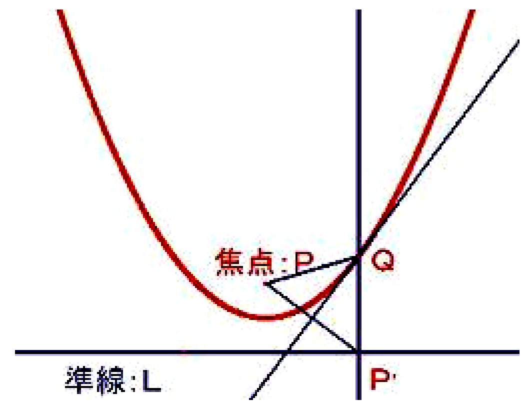

図１０：Cabri GeometryⅡで作図し点Ｑの軌跡をとった

②２つの放物線の共通接線を折り、傾きを求める

生徒に折り紙上に焦点と準線を２つずつとってもらい、共通接線を折ってもらった。次に共通接線の傾きを方程式で解いていった。穴埋め形式で、生徒を指名した。その結果、傾きは $-\sqrt[3]{b/a}$ となり、$a=1$、$b=2$ を代入すると、2 の立方根が現れることが示された。

③まとめ

ギリシア三大作図問題の１つである立方体の倍積問題は、定木とコンパスのみで解くことができないことを再度強調し、折り紙では解けることを確認した。また、共通接線を折る折り方は、ユークリッド原論の内容を超越した方法であり、折り紙とは立方根を求めることができる「道具」であることを強調して、授業を終えた。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(12)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.234-245、2005年3月

6．考察

事前アンケート、事後アンケートより課題について議論していく。

以下、事前・事後アンケートの内容とその結果。アンケート内の生徒の特徴的な感想を記載する。

事前・事後アンケートの内容

①幾何学（三角形の合同や図形など）は普段の生活の中に存在すると思いますか。
②方程式が普段の生活の中に存在すると思いますか。
③定木（定規）とコンパスを使って、方程式の解を求めることができると思いますか。
④折り紙を使って、方程式の解を求めることができると思いますか。

以上の質問に対して、以下の番号に丸をつけてもらった。

1．とてもそう思う　　2．少しそう思う　　3．どちらでもない
4．あまりそう思わない　5．全くそう思わない

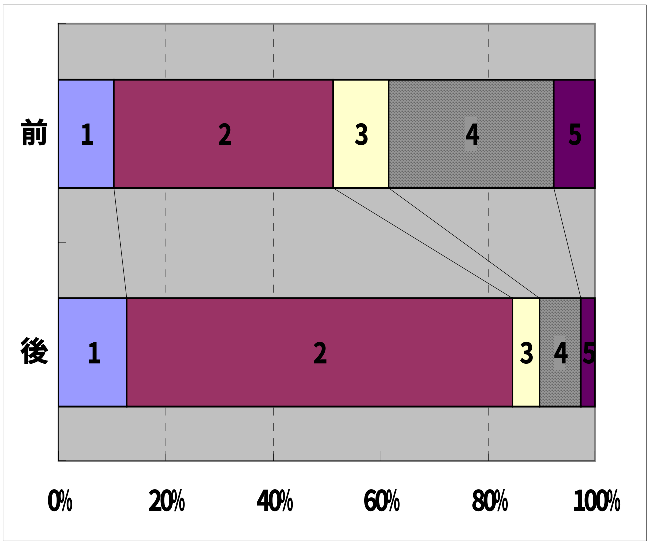

表１：質問①の結果

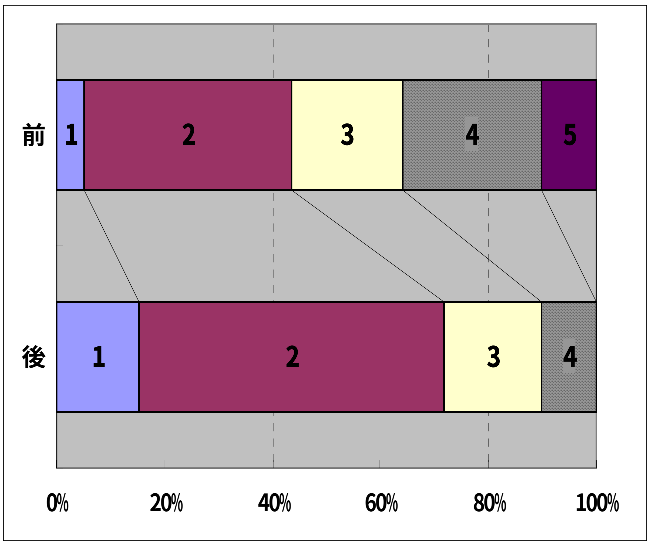

表２：質問②の結果

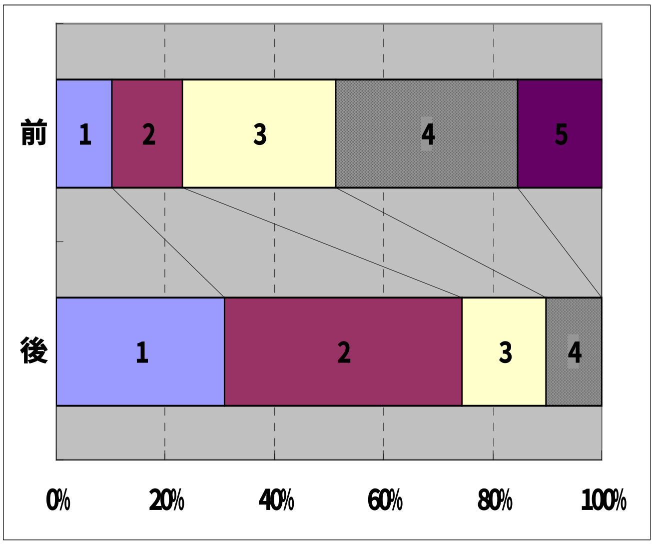

表３：質問③の結果

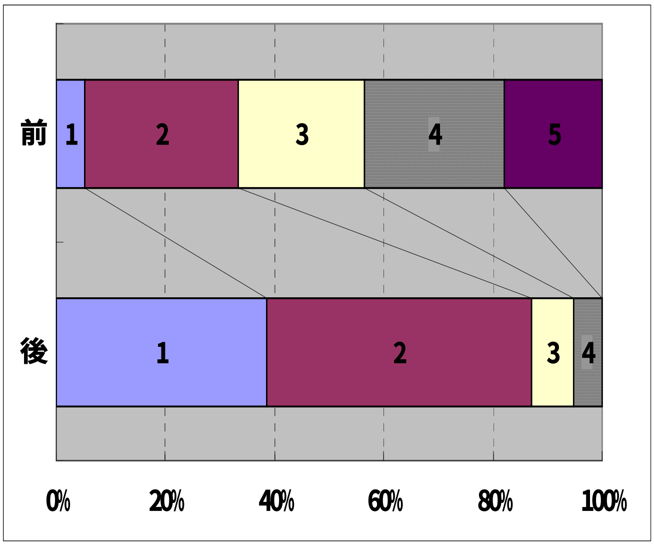

表４：質問④の結果

アンケート内の生徒の感想

ⅰ. 興味を持ったので機会があったらユークリッド原論を読んでみたいと思いました。
ⅱ. 考えたり、聞いたりしていておもしろかった。ユークリッド原論の本の問題を見てみたいと思った。
ⅲ. 折り紙で放物線が書けるなんて思わなかったのでびっくりした。他にも何かためしてみたいと思う。
ⅳ. 折り紙で数学ができることに驚いた。数学の別の分野ができたみたいでおもしろかった。
ⅴ. まさか折り紙で立方体の倍積問題てのをとけるとは思いませんでした。されど折り紙。作り方無限大ですね。
ⅵ. 折り紙でユークリッドが解けるなんて、数学は奥が深いと思った。
ⅶ. 昔の人の数学の発想がすごいと思いました。
ⅷ. 数学に対する考え方が少し変わりました。

（1）課題１に対する議論

課題１：折り紙という日常的な教材を使用することによって、生徒は数学を身近なものとして捉えることができるか。またそれにより、生徒の自ら学び、自ら考える主体的な学習態度を育成することができるか。

表１、表２より事前よりも事後の方が質問①、質問②に対して肯定的な考えを示す生徒が増えたと言える。これにより、実際に生徒の日常の中で存在してきた折り紙を教材としてとりあげたことで、数学を身近なものとして感じることのできる生徒が増えたと言える。また【やりとり２】から、折り紙のような日常に存在する数学を学ぶことによって、興味・関心をもち、改めて数学のよさに気づくことができたと推測できる。それらは、生徒の感想からも伺うことができる。感想ⅰ、感想ⅱおよび感想ⅲはユークリッド原論や折り紙に興味・関心をもち、さらに自ら主体的に学ぼうとする態度が伺える。

以上から、生徒は本研究の授業実践において、課題１を達成したと考えられる。

（2）課題２に対する議論

課題２：生徒は、本授業を通して行われる解釈学的営みによって、数学観が変容するか。

質問③は、定木とコンパスを用いて作図するという古代ギリシア時代の数学と、現在生徒が主に学習している代数学（方程式）を関連付けて考えることができるか。質問④は、折り紙の数学と関連付けて考えることができるか。つまり両者は異文化を自文化で解釈できるかを問う質問である。

表３、表４より、授業前よりも授業後の方が質問に対して肯定的な考えを示す生徒が増えたと言える。これは、異文化を自文化で解釈することができる生徒が増えたと言えるだろう。また【やりとり１】から、生徒が異文化を解釈するときに生じる難しさやカルチャーショックを感じていると憶測できる。それらは生徒の感想からも伺うことがで

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(12)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.234-245、2005年3月

きる。感想ⅳ～ⅷからは生徒の驚きが汲み取れる。さらに感想ⅳと感想ⅷからは、授業を通じて異文化を体験し、数学に対して新たな視点が生まれたことが伺える。感想ⅴと感想ⅵからは、異文化を体験してカルチャーショック受けたことと、数学の奥深さを感じたことが伺える。感想ⅶからは数学の歴史を学習したことによって、他者の考えを解釈し、認める解釈学的営みが行われたことが推測できる。

以上から、生徒は本研究の授業実践において、課題２を達成したと考えられる。

７．おわりに

本研究は、数学史的な話題として立方体の倍積問題を取り上げ、解釈学的営みに基づき教材開発・授業実践を行った。その結果、生徒が自ら学び自ら考えるという主体的な態度が見られた。また、他者の考えに共感する態度も見られた。

その一方、本研究での課題も明らかになった。放物線の定義という高校２年生の数学の範囲を超える内容を扱ったことにも原因が考えられるが、生徒側からの意見を授業に積極的に活かすことができず、授業者側から考え方や方略を与えてしまう場面が多くあった。この課題に対して、生徒の積極的な活動やコミュニケーションを促すため、４～５人のグループ活動を取り入れ、生徒同士が考察した内容について議論するなどの解決策が考えられる。生徒主体で授業が展開されるような授業実践を考えていきたい。

謝辞

本授業の実施に際し、栃木県立佐野高等学校の田島一利校長をはじめ、石塚学先生、並びに数学科の先生方には、たいへん貴重なご指導・ご意見をいただきました。ここに厚く御礼申し上げます。

注：本研究は、平成 16 年度科学研究費、特定領域研究(2)課題番号 15020214「数学用機械と JAVA による移動･変換と関数･微積ハンズオン教材の WEB 化研究」(研究代表者礒田正美)において開発された歴史的道具を前提にして、平成 16 年度科学研究費、基盤研究(B)(2)課題番号 14380055「数学の文化的視野覚醒と新文化創出のための教材・指導法開発研究」(研究代表者礒田正美)の一環として行われた。

<参考文献・引用文献>

【１】文部省(1999).　*高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編.*　実況出版

【２】礒田正美(2001).　異文化体験から見た数学の文化的視野の覚醒に関する一考察，隠れた文化としての数学間の意識化と変容を求めて.*筑波数学教育研究*,20,39-48.

【３】礒田正美(2003).　なぜ道具を数学教育で活用する必要があるのか～道具を使ってこそ学べる数学の教育的価値を明らかにするためのパースペクティブ～，*日本数学教育学会第 36 回数学教育論文発表会：「課題別分科会」発表収録：今後の我が国の数学教育研究*，246-249

【４】礒田正美(2002).解釈学から見た数学的活動論の展開，人間の営みを構想する数学教育学へのパースペクティブ．*筑波数学教育研究*,21,1-10

【５】礒田正美・土田知之(2001).異文化体験を通じての数学の文化的視野の覚醒；数学的

活動の新たなパースペクティブ．*日本科学教育学会年会論文集*,25,497-498

【６】飯島忠(1988).2 次曲線の接線と 2 次曲線の焦点の性質.*日本数学教育学会誌第70 巻第 9 号*,p.38-45

【７】仁田原史明(2003) 解釈学的営みとしての数学授業に関する一考察～角の三等分問題を題材として．*中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)「確かな学力」の育成と道具を用いた数学教育*,p.43-54

<上記以外に教材開発で参考にした文献>

【８】ロベルト・ゲレトシュレーガー（2002）*折り紙の数学～ユークリッドの作図法を超えて～*(深川英俊訳).森北出版

【９】Euclid(1971).*ユークリッド原論*(中村幸四郎 ほか 訳).東京:共立出版.

【１０】T.L.ヒース(1998).*復刻版 ギリシア数学史*(平田寛,菊池,大沼訳).共立出版.

【１１】スチュアート・ホリングデール(1993).*数学を築いた天才たち(上)*.講談社.