出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究 (12)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.220-233、2005年3月

パスカルの数三角形を用いた授業研究

―他者の立場の想定による数学と人間とのかかわり―

筑波大学大学院修士課程教育研究科
平島　絡美

章構成

要約

本研究では、パスカルの数三角形とその応用である確率論に関する一次文献を扱い、その解釈を通して、生徒の数学観の変容が見られるかを考察した。授業結果から、原典解釈により、生徒が数学を人間の社会・文化的活動であることを認めることができたことが示された。

キーワード：数三角形、解釈学、他者の立場の想定、数学と人間、数学基礎

1．はじめに

高等学校学習指導要領解説に、「高等学校では、数学に興味・関心等をもたない生徒が少なからずいることもまた事実である。」（文部省, 1999, p.21）とあるように、数学のすばらしさに気付くことができずに、学校生活を終える人も少なくない。そこで、学習指導要領によると、数学の興味・関心等は、「数学を学習する意義、数学的な見方や考え方のよさ、数学の美しさ、文化や社会生活において数学が果たしている役割などを理解させること」（文部省, 1999, p.21）により得られるとある。本研究は、特に「文化や社会生活において数学が果たしている役割」に注目して考察を行ったものである。

(1)他者の立場の想定

数学が文化として教えることは、新設された「数学基礎」において目標として明示された。その目標の中に、「数学と人間とのかかわりや文化や社会生活において数学の果たしている役割について理解させ」（文部省, 1999, p.31）とある。数学と人間の活動については、「数学の諸概念が人間の活動とのかかわりの中から生まれてきたことを認識する」（文部省, 1999, p.33）とあるように、数学史を取り入れた授業を提案している。それでは、なぜ数学史なのか。礒田（2001）は、「数学史は、数学を人の営みとして自覚する意味での数学の文化的視野の覚醒契機を提供しえる」と述べている。また、特に歴史上のテキストを利用することで、文化的視野が覚醒することを指摘している。歴史的文献を解釈するという解釈学的営みにより、解釈者は、著者の心

情を想定し、他者の立場になってみるという「他者の立場の想定」（礒田, 2002a, p.3）を行う。そして、その想定から自分の考えが明らかになり、「自己理解」（礒田, 2002a, p.3）へとつながるのである。これらの体験を通して、解釈者は、数学も文化であることを実感し、人の営みであると認識するのである。

(2)数学と人間とのかかわり

「数学基礎」に、数学と人間の活動として、「数量や図形についての概念等が人間の活動にかかわって発展してきたことを理解し」（文部省,1999, p.32） とある。これは、数学の諸概念が人間の活動とのかかわりの中から生まれてきたことを理解することであるが、本研究の題材の一つであるパスカルの確率論は、まさにそうであるように、当時の賭事から生まれたものである。

以上により、筆者はパスカルの数三角形に関する題材を教材化し、原典解釈を取り入れた授業を通して、生徒が数学を人間の社会・文化的活動であることを認めることができるかを考察する。

2．研究目的・研究方法

(1) 研究目的

本研究では、教材として数三角形に関する原典解釈を行うことにより、生徒が数学を人間の社会・文化的活動であることを認めることができるかについて考察する。

上記の目的を達成するために、以下の課題を設定する。

課題１．数三角形に関する一次文献やパスカルからフェルマへ宛てた書簡を通して、パスカル（他者）の立場の想定を行うことができるか。

課題２．数三角形に関する原典解釈を行うことにより、確率論の始まりを知り、数学が人間とのかかわりから生まれてきたことをとらえることができるか。

(2) 研究方法

数三角形を題材とした授業を行う。授業テキストとビデオカメラによる授業記録、また授業前後のアンケートをもとに考察する。

3．教材化

本研究では、『パスカル全集Ｉ』に収められている「数三角形論」、「単位数を母数とする数三角形の様々な応用」と「パスカル、フェルマ往復書簡」を原典として用いた。ここで、本研究での原典は、翻訳文献も含む。

数三角形は、現在では「パスカルの三角形」と呼ばれているものである。しかし、ブレーズ・パスカルが 1654 年に論文「数三角形論」を発表する以前にも、数三角形は存在していた。それは紀元前 2 世紀のインドの数学者から始まり、現在知られているだけでも 1654 年までに 6 人の数学者が数三角形を書き残していた。にもかかわらず、現在「パスカルの三角形」と呼ばれているのはなぜか。中村（1959）は、パスカルが数三角形を彼の数列論の原理的方法として採り上げ、これを縦横に駆使して、数列論、組合せ論、確率論、2 項式展開等に著しく発展させたという理由を挙げている。生徒自身がその理由を考えるために、数三角形の確率論への応用に絡めて考案して教材化したものが、本研究である。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究（12）
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.220-233、2005年3月

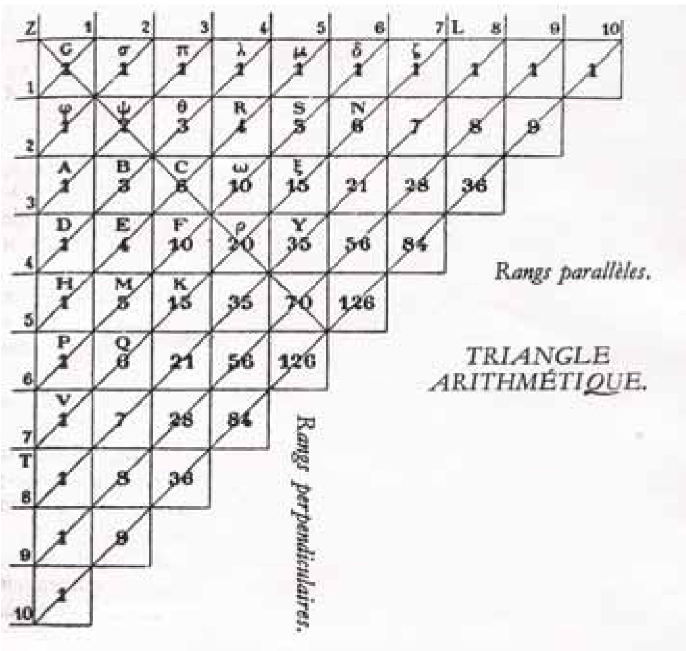
授業では、まず「数三角形論」で使用されている用語の説明を行った。パスカルは、数三角形に関する帰結を 19 個導いている。その中で、確率論への応用に必要な帰結を 2 つ（帰結第 7、第 10）を採り上げ、解釈した。また、帰結第 12 にのみ証明が与えられており、その証明法は、数学的帰納法が用いられている。「この数学的帰納法の論法が、パスカルによって、帰結第 12 ではじめて完全に述べられた。」と中村（1959）は述べている。この業績も生徒に紹介したいと考えた。

さらに 2 時間目では、数三角形の応用の中でも確率論を選んだ。これは、「数回勝負をする 2 人の賭博者の間でなされるべき賭の分け前を定めるための数三角形の用法」という題がついている。当時、確率は賭金の分配問題に使われていた。そこでパスカルは、2 人の賭博者の場合に限り、数三角形を用いて分配問題を解くことを考えた。この問題に関しては、数三角形を使用せずに問題を解いてみた後、今度は数三角形を使って同じ問題を解いた。また、パスカルは分配問題に関してフェルマと往復書簡で議論しており、この議論が後に、確率を発展させるのである。現在、書簡は全部で 6 通確認されているが、その中で、1654 年 7 月 29 日にパスカルからフェルマへ宛てた書簡を原典解釈し、パスカルの立場の想定を行い、パスカルがどういう気持ちで書簡を書いたのかを考えた。

4. 数学的解説

(1)数三角形について

パスカルが考案した数三角形は、現在我々が教科書で見るような数三角形とは形が異なる。様々な部分に名称が付けられているので紹介する。まず、マス一つひとつを＜細胞＞と呼ぶ。細胞の一部には、H や φ などの名前が付けられている。これは、この後の数三角形の関する議論をしやすくするためにあると考えられる。ここで、細胞 G は＜母細胞＞と呼ばれ、G から縦横均等に 10 個に分けられている。そして、縦横に付



けられた 1 から 10 までの数字を＜分割の指数＞と呼ぶ。また、左から右へ進む 2 つの平行線の間の細胞の集まりを、＜同じ水平行の細胞＞といい、その分割の指数が 3 だった場合、特に第 3 水平行の細胞と呼ぶ。同様に、上から下へ進む 2 つの平行線の間の細胞を＜同じ垂直行の細胞＞といい、その分割の指数が 3 だった場合、特に、第 3 垂直行の細胞と呼ぶ。さらに、縦横の同じ分割の指数同士を結んだ左下から右上にかけて引かれた斜めの線を、＜底辺＞と呼ぶ。同じ底辺が対角線上に横切っている細胞を＜同じ底辺の細胞＞といい、その分割の指数が 3 だった場合、第 3 底辺の細胞、もしくは、細胞の名前を取って、底辺 Aπ という。同じ底辺の細胞で、その両端から等距離にあるものを＜相反細

胞＞と呼ぶ。ここで、細胞 G とそれぞれの底辺により、三角形が作られる。これは、指数と同じ数だけ存在する。この三角形一つ一つを＜数三角形＞と呼ぶ。

各細胞の数は、その垂直行における直前の細胞の数とその水平行における直前の細胞の数との和に等しい。例えば、細胞 C の数は、細胞 θ と細胞 B との和に等しい。しかしそれぞれの細胞の数は、細胞 G に入れる任意の数に依存する。筆者は 1 の場合の数三角形しか知らなかったので、他の場合の数三角形もあることに驚いた。

これらをもとに、パスカルは、数三角形から 19 個の帰結を導いた。パスカルは、細胞 G の数が 1 とした数三角形で考えているが、他の数でも 19 個の帰結は当てはまるのである。ここからは、授業で採り上げた帰結を 3 つ紹介する。

帰結第 7　すべての数三角形において、各底辺の細胞の和は、その直前の底辺の細胞[の和]の 2 倍である。

帰結第 10　すべての数三角形において、或る底辺の 1 端から始めて連続した細胞を欲するだけとれば、その和は、直前の底辺中の同じ個数の細胞に、同じ個数より 1 個だけ少ない細胞を加えたものに等しい。

帰結第 12　あらゆる数三角形において、同じ底辺にあって隣接する 2 つの細胞のうち、上位の細胞と下位の細胞との比は、上位の細胞から底辺の最上段までの細胞の個数（両端の細胞を含む）と、下位の細胞から最下段までの細胞の個数（両端の細胞の個数）との比に等しい。

ここで、パスカルが与えた帰結第 12 の証明を以下に記す。

> この命題には無限に多くの場合があるが、私は 2 つの補題を仮定することによって、極めて短い証明を与えよう。
>
> 第 1. これは自明であるが、この比例は第 2 底辺において成り立つ。なぜならば、φ と σ との比が 1 対 1 との比に等しいことは極めて明らかである。
>
> 第 2. もしこの比例が任意の 1 底辺において成り立つならば、それは必然的に次の底においても成り立つ。
>
> ここから、この比例が必然的にすべての底辺において成り立つことがわかる。
> なぜならば、補題 1 によって、この比例は第 2 底辺において成り立つ。
> 故に、補題 2 によって、それは第 3 底辺において成り立つ。故に、第 4 底辺においても成り立つ。以下限りなく同様である。
>
> 故に、補題 2 のみを証明すればよい。それは次のようにする。
> いま、この比例が任意の 1 底辺、例えば第 4 底辺 Dλ において成り立つとする。すなわち、D と B との比が 1 と 3 の比に、B と θ との比が 2 と 2 との比に、θ と λ との比が 3 と 1 との比にそれぞれ等しいとする。そうすれば、同じ比例が次の底辺 Hμ においても成り立ち、例えば E と C との比は 2 と 3 との比に等しい。
> なぜならば、仮定によって、D と B との比は 1 と 3 との比に等しい。
> 故に、D+B と B との比は、1+3 と 3 との比に等しい。
>
> E と B との比は、 4 と 3 との比に等しい。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究（12）
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.220-233、2005年3月

同様に、仮定によって、B と θ との比は 2 と 2 との比に等しい。
故に、B＋θ と B との比は 2+2 と 2 との比に等しい。
C と B との比は、4 と 2 との比に等しい。
しかるに、B と E との比は、3 と 4 との比に等しい。
故に、交鎖比によって、C と E との比は、3 と 2 との比に等しい。証明終。

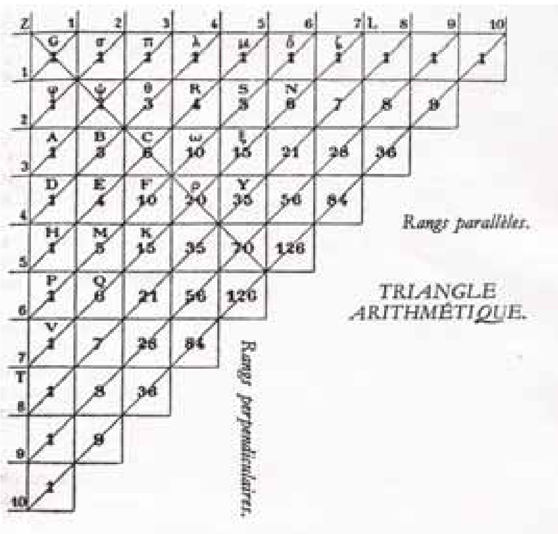
中村（1959）によると、パスカルの数学的帰納法は、

（ｉ）当面の問題には、無限に多くの場合があるけれども、これに対して２つの補助定理を設ければ簡単に説明できること。
（ii）2 つの補助定理を実際に設定してこれを証明すること。
（iii）2 つの補助定理に基づいて、1 から 2 へ、2 から 3 へ、かくて無限の場合に定理が成立すること。

が論法として使われている。2 時間目に分配問題に関する命題が出てくるが、この証明の論法も同じである。この業績によって、近代数学がはじめて、「すべての自然数」に関する命題をもったことになるのである。

(2)数三角形の確率論への応用について

ここでは、2 人の賭博者の賭金の配分について説明する。問題の一つを挙げると、「2 人の賭博者が 3 回上がりの勝負をし、各々が 32 ピストル（賭金の単位）ずつ賭けたとする。第 1 の者が 2 勝、もう一方が 1 勝しているとき、ここで勝負をやめた場合、



賭金の配分はどうなるか」というものである。パスカルは、この問題を数三角形を用いて解いた。まず、各々に不足している勝数の和を出す。この場合、その和は第 1 の者の 1 勝ともう一方の 2 勝を足した 3 勝である。この 3 勝と同じ個数を持つ底辺を数三角形から探し出す。それは、第 3 底辺になる。そして、この底辺の細胞の和は、1＋2＋1＝4 となる。
第 1 の者の配分について考える。第 3 底辺の細胞の第 1 細胞から相手に不足している勝数である 2 と同じ個数の連続する細胞の和をとり、それは 1＋2＝3 となる。よって分け前は、

$$\text{第1の者の分け前} = \frac{\mathrm{A}+\psi}{\mathrm{A}+\psi+\pi}\times 64 = \frac{3}{4}\times 64 = 48$$

となる。また、もう一方の分け前も、第 3 底辺から残りの細胞の和、この場合は 1 をとる。よって、分け前は、以下のようになる。

$$\text{もう一方の分け前} = \frac{\pi}{\mathrm{A}+\psi+\pi}\times 64 = \frac{1}{4}\times 64 = 16$$

他の問題でも、不足している勝数を考え、その数と同じ個数を持つ底辺を見つけて求めればよい。授業では、この他に同様の問題を 2 問扱った。

5．授業概要

(1)．授業環境

①対象：筑波大学附属高等学校 2 学年

（1 日目 4 名[S1、S2、S3、S4]、2 日目 2 名[S1、S3]）

②日時：平成 16 年 12 月 6 日、7 日の計 2 日間。（計 60 分×1 回、90 分×1 回）

③準備：コンピュータ（Windows）、Microsoft Power Point、事前・事後アンケート、授業テキスト、追加資料、デジタルビデオカメラ

(2)．授業展開

＜一時間目＞

ねらい：採り上げた 3 つの帰結について原典解釈を行い、さらには帰結第 12 で使われている数学的帰納法に気付くことができるか。

授業の流れ

① パスカル以前にも数三角形が存在していたことと数三角形で使われている用語の説明を行う。

② ここで、母細胞の数が任意の数でよいので、生徒はその数を決めて数三角形を作った。写真１は、S2 が母細胞の数を 2 として数三角形を作ったものである。他の生徒は、7 や 3 で数三角形を作ってみたりしていた。

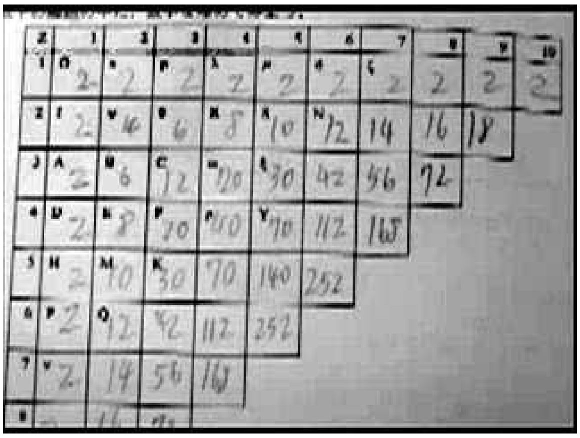


写真１

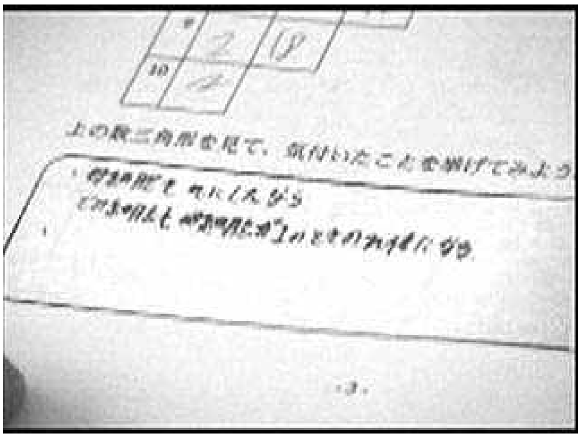


写真２

③ 自分で作った数三角形や母細胞の数が 1 の場合の数三角形を見て気付いたことを挙げる。生徒からは、「左上から右下にかけて引かれている線を境に左右対称であること」や、「母細胞の数が 1 のときの数三角形と、ｎのときの数三角形を比べると、細胞の数がすべてｎ倍になっていること（写真２）」などが挙げられた。ここで、パスカルがこの数三角形から気付いたこととして 19 個の帰結を導いたことを述べると、生徒は「エー」「オオ」という驚きの声をあげていた。

④ 19 個の帰結のうち、3 つを今回の授業で扱った。その最初の帰結第７について、生徒は、パスカルが挙げた例をもとに作った穴埋め形式の問題を解く。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(12)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.220-233、2005年3月

写真３

写真４

写真３は、原典と数三角形の両方を見比べながら、必死に解釈しようとしている生徒の姿である。また写真４は穴埋めについて、生徒同士が相談し合っている様子である。

帰結第７について、穴埋めをもとに生徒が発表した。

CONSÉQUENCE SEPTIÈME

En tout Triangle arithmétique, la somme des cellules de chaque base eſt double de celles de la base précédente.

訳：すべての数三角形において、各底辺の細胞の和は、
　　その直前の底辺の細胞[の和]の２倍である。

任意の底辺として DBθλ をとる。そうすれば、その細胞の和はその直前の底辺①＿＿＿＿の細胞の和の２倍になる。なぜならば、[任意の底辺の]両端の細胞②＿＿＿と③＿＿＿は、[その直前の底辺の]両端の細胞である④＿＿＿と⑤＿＿＿に等しく、他の各⑥＿＿＿、⑦＿＿＿は、直前の底辺の２細胞⑧＿＿＿＿と⑨＿＿＿＿に等しい。

故に、⑩＿＿＿＿＿＿は⑪＿＿＿＿＿＿に等しい。

他のすべての底辺についても同じことが同様にして証明される。

S4 の発表

「ここでは、任意の底辺 DBθλ をとって、そうすると、その細胞の和は、D+B+θ+λ になります。それが、直前の底辺 Aψπ の細胞の和の２倍になります。それはなぜかといいますと、D と λ はその直前の底辺の両端の細胞である A と π に等しい。また、B と θ というのは、直前の底辺の A+ψ、ψ+π に等しい。ゆえに、この和（D+B+θ+λ）は、（A+ψ+π の）２倍に等しい。」

このように、少しギリシャ文字の読み方に苦戦していたようだが、完璧に発表をしてくれた。

⑤ 帰結第 10 も同様に、穴埋めを解いた後、生徒の一人が説明を行う。

⑥ 帰結第 12 については、生徒は、任意の底辺をとって考えた。よって、生徒 4 人の解答がそれぞれ異なるので、説明をしている生徒の発表に、椅子を前に向けて真剣に聞いている様子が伺える（写真５）。

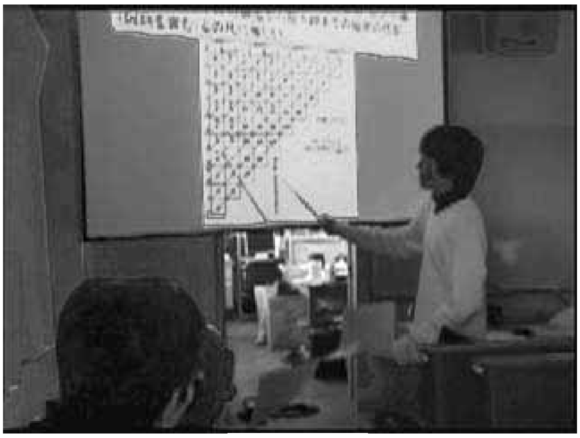


写真５

⑦ 帰結第 12 にのみ証明があり、それを採り上げた。この証明に数学的帰納法が使われていることに、生徒は全員気付いた。そこで、「どこが帰納法だと思ったか？」という質問に対し、S2 は、「補題 1 が成り立てば補題 2 が成り立って、補題 2 が成り立てば補題 3 が成り立つということが書いてあったから」と言った。現在の数学的帰納法と論法は異なるが、その性質は同じであるので、原典から読み取ることができたことわかる。そして、この数学的帰納法がパスカルによってはじめて完全に述べられたという業績について述べると、「ほぉ」と初めて知った様子であった。

⑧ パスカルの数三角形がどのようなものであるか、3 つの帰結、そしてパスカルが数学的帰納法を使って証明していたことを確認して、授業を終えた。

＜二時間目＞

ねらい：今日数三角形がなぜ「パスカルの三角形」と呼ばれているのかと数三角形がどのように役立っているかを見つけることができる。

① 前回の内容をふまえ、数三角形の確率論への応用を扱うことを述べる。さらに、パスカルが確率論の創始者であるということも伝えた。そして、パスカルが実際に解いた賭けに対する賭金の配分を考える問題の前に、ルールの確認を行った。

賭のルール

- 賭博者はあらかじめ認め合った条件に従う。
- お金を賭けたら、賭博者はそのお金の所有権を失う。
- 賭をして、勝ったら賭金以上の金額がもらえる。
- 賭博者は、勝負がどのような段階であろうと、話し合いによって勝負をやめて、賭金の一部の所有権を回復することができる。

分け前のルール

2 人の賭博者が勝負の途中で賭をやめ、賭金を分けようとするときの正しい配分を**分け前**という。その際、分け前は双方が納得できるものでなければならない。

- 2 人の賭博者が勝負をして、一人が勝てば一定の金額をもらい、負ければ相手のものになるという場合において、彼らが賭をやめて分け前を取ろうとするとき、正当に分けようと思うならば、勝ったときにもらえる金額から負けたときにもらう金額を引いた金額を折半し、各自が自分の分を取ることである。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究（12）
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.220-233、2005年3月

② ルールに従って、パスカルが解いた問題を解いてみる。

２人の賭博者が３回上がりの勝負をし、各々がそれぞれ 32 ピストルずつ賭けたとする。
（Ⅰ）A さんが２回、B さんが１回勝っている。
（Ⅱ）A さんが２回、B さんが０回勝っている。
（Ⅲ）A さんが１回、B さんが０回勝っている。
このとき、
ⅰ.次の勝負で A さんが勝った場合
ⅱ.次の勝負で B さんが勝って、そこで勝負をやめた場合
ⅲ.ここで勝負をやめた場合
のそれぞれの場合について賭金の配分はどうなるか。

		Aさん	Bさん
Ⅱ	ⅰ	６４　ピストル	０　ピストル
	ⅱ	４８　ピストル	１６　ピストル
	ⅲ	５６　ピストル	８　ピストル
Ⅲ	ⅰ	５６　ピストル	８　ピストル
	ⅱ	３２　ピストル	３２　ピストル
	ⅲ	４４　ピストル	２０　ピストル

答えは、右の表のようになる。ⅰとⅱの場合について S3 は、ルールに従って解くことができたが、ⅲをはじめ間違って解答していたのでそれを記す。ⅲについては、A さんのⅰとⅱの場合の金額に注目して、ルールを適用させる。まず、勝ったとき得られる金額 64 ピストルから負けたとき得られる 48 ピストルを引いた 16 ピストルを折半し、その 8 ピストルを負けたときに得られる 48 に足して、56 ピストルを得るというものである。S3 は、負けたときに得られる 48 ピストルを折半し、それに 16 ピストルを足して得られた 40 ピストルをⅲの答えとしていた。この問題に関しては、S3 は、S1 との相談によって、正しい解答を得ることができた。

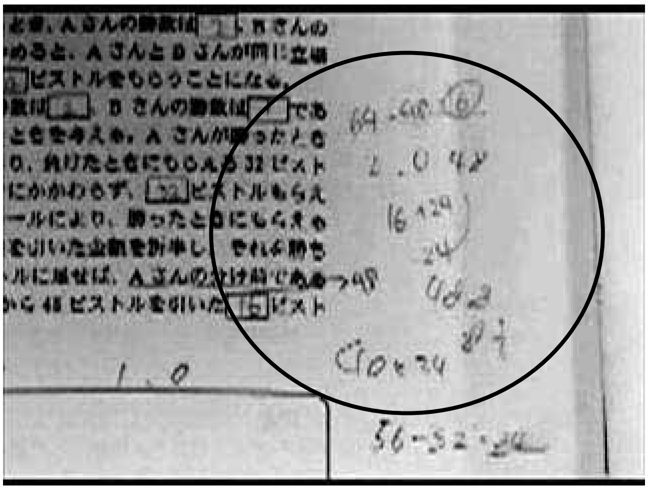


写真６

③ 次に、生徒は数三角形を利用した方法で解いてみた。これには命題があり、それは４章(2)に載せてある。こちらから観察している分には、数三角形を利用しない場合よりスムーズに計算できたようである。そで、問題(Ⅲ)のⅲに関して S3 発表してもらった。

「今それぞれ不足しているのが A さんに２勝で、B さんが３勝。それを足すと５で、５個の細胞を持つ第５底辺をとる。第５底辺から、B さんに不足している勝数３つ分だけ細胞をとると、和は 1+4+6=11 になる。で、残ったのは、A さんの 1+4=5 になります。A さんの分数は、$\dfrac{11}{\text{第５底辺}}$ で、分け前は、$\dfrac{11}{16}\times 64 = 44$ になり、B さんの分数は、$\dfrac{5}{16}$

で、分け前は、$\dfrac{5}{16}\times 64 = 20$ です。」

と、数三角形を利用しない場合には少し混乱していた S3 も、数三角形の利用について聞いてみたところ、やはり「わかりやすい」という返事が返ってきた。

④　命題の証明に関しては、4 つの部分にそれぞれに質問を設定されていて、生徒はそれぞれを解答した（授業資料参照）。また、以下の部分の最初の 2 行は結果を述べ、その後の部分からはその理由を述べている。このような形式はわかりにくいと判断し、特にこの部分についてはこちらで説明を行った。

[訳]そうすれば,第 5 底辺もまた、合わせて 5 勝が不足している 2 人の賭博者の分け前を含む。例えば、第 1 の者に 2 勝、相手に 3 勝が不思しているとすれば、賭けられた金額のうち第 1 の者の得る分は $\dfrac{H+E+C}{H+E+C+R+\mu}$ なる分数であらわされる。

なぜならば、それぞれに何勝かが不足している 2 人の賭博者の得るものを知るためには、前の補題によって、第 1 の者が勝った場合に得る分数と負けた場合に得る分数とをとり、異分母であればこれを通分した上、両分数の分子の和を分子とし分母の 2 倍を分母とする分数を作らねばならない。

故に、いまの場合の第 1 の購博者が勝った場合と負けた場合とに得る分数を調べよう。

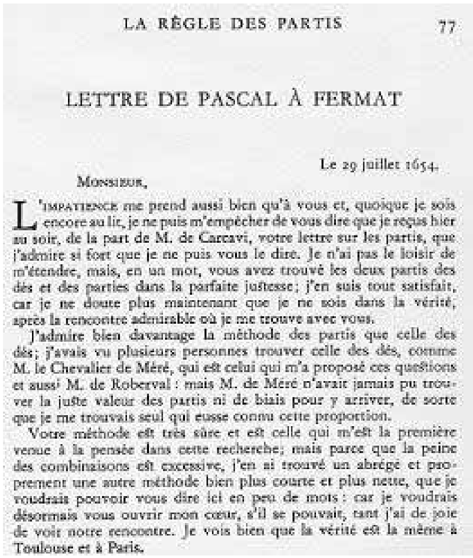
2 勝が不足している第 1 の者がこれからおこなう勝負にもし勝てば、彼にはもう 1 勝しか不足しておらず、相手には依然として 3 勝が不足している。故に、さきの仮説によって、彼らの分け前は第 4 底辺において見出され、第 1 の者は $\dfrac{D+B+\theta}{D+B+\theta+\lambda}$ なる分数を得ることになる。

反対に、もし第 1 の者が負ければ、彼には依然として 2 勝が不足しており、相手にはもはや 2 勝しか不足していない。故に、仮説によって、第 1 の者の分数は $\dfrac{D+B}{2D+2B+2\theta+2\lambda}$ となる。故に、分け前の場合には、第 1 の者は、

$$\frac{D+B+\theta+D+B}{2D+2B+2\theta+2\lambda}\text{すなわち}\frac{H+E+C}{H+E+C+R+\mu}$$

なる分数を得ることになる。

⑤　そして、この分配問題についてパスカルからフェルマへ宛てた書簡の一部を読み、どのような気持ちでこの書簡を書いたのかを考えてもらった。


LA RÈGLE DES PARTIS　77

LETTRE DE PASCAL À FERMAT

Le 29 juillet 1654.

MONSIEUR,

L'IMPATIENCE me prend aussi bien qu'à vous et, quoique je sois encore au lit, je ne puis m'empêcher de vous dire que je reçus hier au soir, de la part de M. de Carcavi, votre lettre sur les partis, que j'admire si fort que je ne puis vous le dire. Je n'ai pas le loisir de m'étendre, mais, en un mot, vous avez trouvé les deux partis des dés et des parties dans la parfaite justesse; j'en suis tout satisfait, car je ne doute plus maintenant que je ne sois dans la vérité, après la rencontre admirable où je me trouve avec vous.

J'admire bien davantage la méthode des partis que celle des dés; j'avais vu plusieurs personnes trouver celle des dés, comme M. le Chevalier de Méré, qui est celui qui m'a proposé ces questions et aussi M. de Roberval : mais M. de Méré n'avait jamais pu trouver la juste valeur des partis ni de biais pour y arriver, de sorte que je me trouvais seul qui eusse connu cette proportion.

Votre méthode est très sûre et est celle qui m'est la première venue à la pensée dans cette recherche; mais parce que la peine des combinaisons est excessive, j'en ai trouvé un abrégé et proprement une autre méthode bien plus courte et plus nette, que je voudrais pouvoir vous dire ici en peu de mots : car je voudrais désormais vous ouvrir mon cœur, s'il se pouvait, tant j'ai de joie de voir notre rencontre. Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris.

[訳]じっとしていられないのは私も同じで、まだ床についているのですが、こう申上げないではいられません。昨日の夕方カルカヴィ氏から、賭の分け前に関するあなたのお手紙を頂きましたが、それをどんなにすばらしいと思ったか、とても言葉でいえるものではないと。心ゆくまで讃嘆の言葉をつづける時間がありませんので一言で申しますと、あなたは骰子遊びの分け前と勝負の分け前と、この二つの分け前を完全に正しく見出されたのです。まことに嬉しく存じます。いみじくもあなたと同じものを見出したのである以上、私が真理の中にいることはもはや疑いないところですから。

骰子遊びよりも賭の分け前を定めるあなたの方法に私はずっと敬服致しました。骰子遊びの分け前は、シュヴィリエ・ド・メレ氏またロベルヴァール氏など数人の方がすでに見出されていたのですが,メレ氏は分け前の正しい値を見出すことは勿論、それを見出す糸口さえお分りになれませんでした。それで私は分け前の正しい比を知っているのは自分一人だと思っておりました。

あなたの方法は非常に確かなものです。そして、私がこれを見出すべく努力していた時、最初に考えついたのもまさにそれなのです。しかし組合せを使うと大へん手間がかかりますので、私はそれを要約したもの、さらに適切に申せば、ずっと短く明晰な別の方法を見出したのです。それをここで簡単にお話したいと思います。というのは、もしできましたら、これからはあなたには心を開いて語りたいのです。それほど私たちが意見を同じくしたということが私には嬉しいのです。パリでもトゥールーズでも真理は一つなのですね。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(12)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.220-233、2005年3月

対話

T：「S1は何て書いた？」

S1：「自分と同じ考えをもっている人を見つけて、更にその理論を深く究明したいと思っている。」

T：「どの部分からそう思った？」

S1：「『これからはあなたには心を開いて語りたいのです。』とか」

T：「なるほど」

S1：「その辺で」

T：「S3は？」

S3：「精神的にも数学の問題が同じ水準でわかっているという点で、身近に理解者ができそうだと感じている。」

このように、パスカルの思いを鋭くとらえていることがわかる。この書簡に関する考察は次章でも述べる。

⑥ まとめ

まとめとして、2日目のテーマ（2日間を通してのテーマでもある）である

（ⅰ）数三角形はどのように役に立っているか？

（ⅱ）数三角形が今日パスカルの三角形と呼ばれているのはなぜか？

に対して、それぞれ生徒2人が自分の意見を述べたので以下に記す。

T：「それでは、1つ目の質問のほうを2人に聞きたいと思います。」

S1：「分け前の問題とかで、文とかでぐだぐだ書くよりも、スムーズに納得しやすいように解決できる（ように役立っている）。」

S3：「数字があらかじめ規則に沿って並んでいるので、例えばそろばんとかみたいな道具として使えるなと。」

T：「ふんふん、じゃ2つ目は？」

S1:：「フェルマが現れるまで、パスカルの意見を理解できる人は一人もいなかったし、数三角形というのをパスカル一人しかその当時理解していなかったというイメージが強い。」

S3：「昔の人も確かに数三角形を見つけてはいたが、パスカルはそこから19個の帰結を導き出して、それが確率の問題に使われたというように、数三角形を道具に押し上げたという業績が認められて、『パスカルの三角形』と呼ばれている。」

2つ目の質問に関して、S1はパスカルしか数三角形を使いこなせる人はいなかったという印象が残ったようだ。また、S3は、数三角形をそれのみならず、確率に応用させたという業績を讃えていることがわかった。さらに、数三角形を単なる数字の並びとみるのではなく、数学の道具とみなしているところがおもしろい。このように、予想以上にこちらの意図を理解してくれたことがわかる。

6．議論

ここで議論するアンケートは、授業前後の変容を考察するため、S1 と S3 のアンケートのみ使用する。

(1)．課題１に対する議論

課題１．数三角形に関する原典やパスカルからフェルマへの書簡を通して、パスカル（他者）の立場の想定を行うことができるか。

事後アンケート（パスカルが生きていた時代と現在の証明を比べて気付いたこと）
① パスカルの証明が長い。それだけ大事な証明だということだろうが、今はもっと短い気がする。
② 現在の証明は簡潔で、パスカルが行った証明と比べるとわかりやすいと思う。ただ、パスカルの方は、証明から彼の思いを読み取ることが可能だった。

筆者はパスカルの長い証明を扱うことに対して、生徒が興味を失うことを恐れたが、前章の書簡に関する対話からわかるように、生徒たちは 2 日間の授業を通して、パスカルが苦労して築き上げた業績であることを読み取っている。そのため、証明が長いということも、パスカルがはじめて数学的帰納法の論法を述べたということで、彼の思いが詰まっていると感じたのだろう。

また、書簡に関しても、パスカルからフェルマへの共感的な姿勢を読み取っている。

事前アンケート（数学を学んでいて、他人と共感するときはどんなときか）
① 解法が同じだったとき
② 共通した理解を相手も持っていると思ったり、感じたとき

これは、生徒たちの実体験に基づく回答であるが、今回の授業では、解釈学的営みを通して、パスカルの心情を想定するという「他者の立場の想定」を行うことができた。

(２).課題２に対する議論

課題２．数三角形に関する原典解釈を行うことにより、数学が人間の営みであることをとらえることができるか。

事後アンケート（数学がどのような学問だと思うか、および、感想）
① 日常生活でも関わりのある、規則性を見出し、生活に役立てたりする学問 数学が日常生活から派生するものだということ
② 数字だとか記号といったもので、世界の動きを認識しようとする学問 これまで数三角形といっても、何だか単純な数字の配列といったイメージしか無かったのですが、今日の授業では、単純なものの中にこそ複雑な理がよこたわっているのだと感じました。深い。

① の感想からは、数三角形が賭金の配分に応用されていたという印象が残ったようで、そこから数三角形と人間活動のかかわりを学んだようだ。また、②の感想では、数学が学校で学ぶ教科としてではなく、数学の果たす役割を見つけることができたようである。よって、生徒は数学が人間の営みであることをとらえることができたといえる。

以上の議論より、課題１、課題２が達成できていることが示された。したがって、本研究の目的は達成された。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究（12）
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.220-233、2005年3月

8. おわりに

本研究では、数学のもつすばらしさに気付くことができずに学校生活を終えてしまうということがあるという現実に問題意識を持ち、数三角形に関する題材を教材化し、数学史を通して生徒が数学を人間の社会・文化的活動であることを認めることができるかを考察した。生徒がどのように原典を解釈したかを知りたいという意図から、記述や意見を述べることが多い授業であったが、「数学が多少なりとも楽しめた」というアンケートからもわかるように、興味を持って取り組んでくれたようである。その甲斐あって、研究の目的を達成することができた。

数学史に触れるという機会は、まだまだ少ない。今回の研究を通して、数学史的な教養が数学を楽しむことや数学のよさに気付くという機会を与えてくれることを私自身、認識することができた。今後は、この教材がより多くの生徒に提供できるように改善していきたい。

謝辞
研究授業の実施に際しまして、筑波大学附属高等学校の川崎宣昭先生、速水高志先生には、多大なるご協力をいただきました。ここに厚く御礼申し上げます。

注
本研究は、平成 16 年度科学研究費、特定領域研究(2)課題番号 15020214「数学用機械と JAVA による移動・変換と関数微積ハンズオン教材の Web 化研究」（研究代表者礒田正美）において開発された歴史的道具を前提にして、平成 16 年度科学研究費、基盤研究(B)(2)課題番号 14380055「数学の文化的視野覚醒と新文化創出のための教材・指導法開発研究」（研究代表礒田正美）の一環として行われた。

引用・参考文献

（1） アイザック・トドハンター(1975, 安藤洋美[訳])． *確率論史 ： パスカルからラプラスの時代までの数学史の一断面．* 現代数学社
（2） 礒田正美(2001)． 異文化体験からみた数学の文化的視野の覚醒に関する一考察：隠れた文化としての数学観と意識化と変容を求めて．*筑波数学教育研究*, 20, 39-48．
（3） 礒田正美(2002a). 解釈学からみた数学的活動論の展開：人間の営みを構想する数学教育学へのパースペクティブ. *筑波数学教育研究*, 21, 1-10
（4） 礒田正美(2002b). 数学教育活動を楽しむ授業作り③ 数学する心を育てる *課題学習・選択数学・総合学習の教材開発.* 明治図書
（5） 島竹里枝(2002). 原典を利用した文化的営みとしての数学指導－パスカル・ライプニッツの計算機を題材にして－. *中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究（8）*. 筑波数学教育研究, p.249.
（6） 中村幸四郎(1959). 数学論文集, 解説, *パスカル全集Ⅰ*, pp.560-570. 人文書院
（7） ブレーズ・パスカル(1959, 原亨吉[訳]). 数三角形論. 伊吹武彦他[編], *パスカル全集Ⅰ*, pp.724-735. 人文書院

（８）ブレーズ･パスカル(1959,　原亨吉[訳]).　単位数を母数とする数三角形の様々な応用. 伊吹武彦他[編], *パスカル全集Ｉ*, pp.704-723. 人文書院

（９）　ブレーズ・パスカル(1959,　和田誠三郎[訳]　).　パスカルからフェルマへ(第１の手紙). 伊吹武彦他[編], *パスカル全集Ｉ*, pp.308-319. 人文書院

（１０）　文部省(1999).　*高等学校学習指導要領解説　数学編理数編.* 実教出版

（１１）Blaise Pascal (1954). Trait du Triangle Arithmetique, *Oeuvres completes* (pp.97-107).

（１２）Blaise Pascal (1954). Usage du Triangle Arithmetique, *Oeuvres completes* (pp.115-126).

（１３）Blaise Pascal (1954). Lettere de Pascal　a Fermat：Le29 juillet 1654, *Oeuvres completes* (pp.77-83).