

歴史的道具による生徒の数学観の変容

比例コンパス(セクター)を題材として

筑波大学大学院修士課程教育研究科
堀内 大介

章構成

1. はじめに
2. 研究目的・研究方法
3. 「セクター」の教材化
4. 「セクター」の数学的解説
5. 「セクター」を題材とした授業
概要
6. 議論
7. おわりに

要約

本研究では、生徒が数学の学習に際して数学史やそれに関連する価値を有する歴史的道具を取り入れた授業を実践することにより生徒の数学観に変容がみられるか検証した。この中で生徒はセクターという道具の数学化の活動を追体験することにより数学が人間の文化的営みであると捉えるようになった。また授業実践により、道具の有用性が確認できたと同時に、生徒の数学観の変容がみられた。

キーワード：比例コンパス、セクター、比例中項、解釈学的営み、原典解釈、数学史

1. はじめに

昨年度から施行された高等学校学習指導要領(数学科)において、「数学基礎」が新しく加えられた。この科目の目標は「数学と人間とのかかわりや、社会生活において数学が果たしている役割について理解させ、数学に対する興味・関心を高めるとともに、数学的な見方や考え方のよさを認識し数学を活用する態度を育てる」ことである。またその中で「数学と人間の活動」という内容の取扱いにおいて、「数学の諸概念が人間の活動とのかかわりの中から生まれてきたことを認識することや、数学を文化や社会などとの関連からとらえることは、それ自身として重要であるとともに、数学に対する興味・関心等を高め、数学をより身近なものとして感じとらせるための有効な方法の一つである」と述べられている。

また中央教育審議会初等中等教育分科会教育課程部会算数・数学専門部会(第3回)においては「数学を大学まで学んだ者でも、その本当の面白さが分かっていない者がいる。役に立つことの実感が湧かないところに課題があるのではないか。」や「高等学校でも実生活との関連を持たせて学ぶことが大事であり、数学的活動をもっと導入した内容を検討する必要があるのではないか。」といった意見が出されたように、生徒は今学んでいる数学が実生活とどういった関係があるのか理解できないまま数学を学び続けている傾向が強いと筆者は捉えている。そのため数学史上の道具を教材とすることで生徒が数学に対してより興味・関心を高めることができる授業を筆者は提案する。

この数学史に関して磯田(2000)は「数学史は彼らの数学体験を相対化する機会を与えて

いる。授業を通じて、現在の学校数学の持つ制約を意識し、その数学観を変更している」(p198)とその使用の有効性を主張している。また磯田(2001)では「異文化体験を自らの文化を自覚し、その文化を発展させる文化的視野への好機」(p40)とみなし、その方途として数学史の利用研究を取り上げている。そして「それまでにないであろう異文化体験をもたらす課題設定をし、自分化の過般化が通用しない体験によるカルチャーショックを前提に、他者の身になって考えてみる、他者の世界において考えてみるという解釈学的営みに従事すること」(p47)を通して、生徒に文化的視野の覚醒を促すことができるとしている。

以上のことをふまえて、筆者は本研究で数学史とそれにちなんだ道具を教材として用いた授業を行うことで、「数学を歴史として捉えること」、「文化や社会との数学のつながり」を生徒自身が認識できるのではないかと考える。今回の授業では Gunter が用いた「Sector」を取り上げた。

2. 研究目的・研究方法

(1) 研究目的

本研究では以下を研究目的とする。

研究目的：道具の操作による数学的活動を取り入れた授業を通して、数学への興味・関心のさらなる喚起を図るとともに、数学を人間の文化的営みとして捉えることにより、数学学習における道具の利用が生徒の数学観の変容に貢献できることを考察する。

この研究目的に対して、以下の課題を設定する。

課題1：数学史の原典解釈や追体験を取り入れた授業やセクターを操作する数学的活動を通して、生徒が数学的な道具に歴史を感じるか。

課題2：課題1をうけて、数学を歴史に沿って学ぶことが重要であることを生徒が認識できるか。

(2) 研究方法

数学史を内容とする文献を利用したテキスト・道具を開発し、教材化を図る。そしてそれらを使用した授業を実践し、その授業の事前・事後アンケートや授業を録画したデジタルビデオを分析し、そこに記録された生徒の反応から上記で設定した課題を考察する。その考察から上記の研究目的が達成されたかどうかを検証する。

3. 「セクター」の教材化

ガンターのセクター(図1)は航海において船上で計算をする時に利用されたもの計算器具である。このセクターを最初に発明したのはだいたい1597年にガリレオ・ガリレイによるものと考えられているが、発明の経緯は様々な説がある。

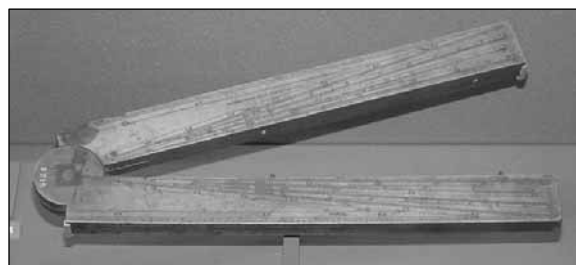


図1 セクターの実物
(出典:パリ国立技術博物館)

セクターの主な材質は木や真鍮であり、表面にはたくさんの目盛りが付いている。この道具の構造・原理には、比、相似、平方根、立方根、三角比、金属の配合、漸長緯度目盛りなどの数学的な要素がたくさん盛り込まれている。

ガンターは 1624 年にセクターなどの数学的な道具の原理や目盛りについて「The description and vse of the sector, the cross-staffe, and other instruments」という本を出版している。このセクターはガリレオが発明した比例コンパスと類似点が多い。しかし、ガンターはイギリスでセクターを用いており、ガリレオはイタリアで比例コンパスを発明している。ガンターのセクターが特徴的な点はガリレオのものよりも目盛りが細かく打たれている点である。そこで筆者はこのガンターのセクターの目盛りの取り方を原典から探り、それを実際に作図するという数学的活動によって、数学が道具に埋め込まれていることに気づくことが可能であると考え、今回の授業の題材とした。

以上のことから、ガンターのセクターを題材とした授業を行うことによって本研究の目的・課題が達成されるかを議論する。

4. 「セクター」の数学的解説

エドモンド・ガンターがその著書「The description and vse of the sector, the cross-staffe, and other instruments」の中で取り上げたセクターには右図のような多くの目盛りが刻まれていた。図 2 においては 12 本の目盛りが存在する。それを以下に挙げる。

- L1: Line of Lines
- L2: Line of Superficies
- L3: Line of Solids
- L4: Line of Sines and Chords
- L5: Line of Tangents
- L6: Line of Secants
- L7: Line of Meridians
- L8: Line of Quadrature
- L9: Line of Segments
- L10: Line of Inscribed bodies in the Sphere
- L11: Line of Equated bodies
- L12: Line of Mettals

このうち図 2 の左には L1,L3,L4,L5,L6,L7 が刻まれ、右には L2,L8,L9,L10,L11,L12 が刻まれている。この 12 本の目盛りの中で授業では時間の関係上、L1,L2,L3 の 3 本に絞った。

次にセクターの基本的な使用方法を L1: Line of Lines を用いて原典(図 3)を元に説明する。

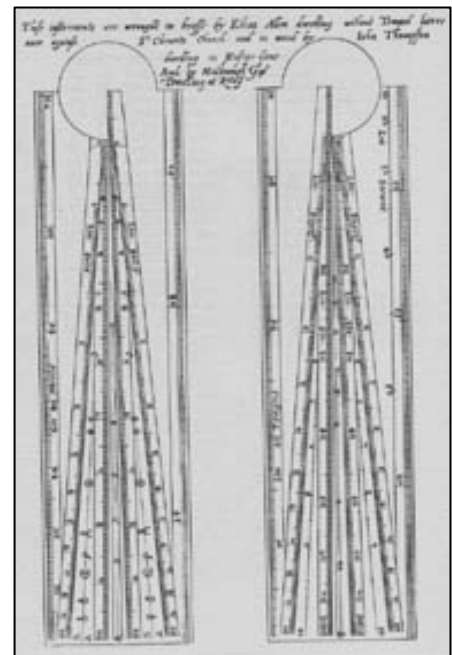


図 2 セクターに刻まれた目盛り

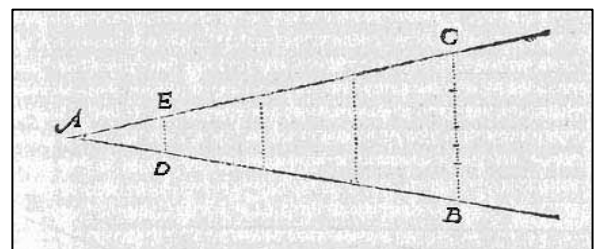


図 3 セクターの原理

まず A はセクターの両脚の交点とし、辺 AB と辺 AC はセクターの両脚とする。
AB=AC,AD=AE となるように点 D,E をとるので辺 DE と辺 BC は平行にひかれる。よって
同位角は等しくなるので

$$\angle AED = \angle ACB, \angle ADE = \angle ABC$$

となり、2組の角がそれぞれ等しくなるので

$$\angle ADE = \angle ABC$$

ゆえに $AE:AC=AD:AB=DE:BC$ (*)が成り立つ。したがって授業の1時間目で扱った線分を
拡大するときには以下のように使用する。(原典では $AE:AC=AD:AB=1:4$ となっている)

この使用例からわかることは、線分 AB,AD もしくは線分 AC,AE の長さの比がそのまま

今拡大したい線分の長さをコンパスで測り取る。

そのまま点 D と点 E に合わせてセクターの両脚を広げる。

広げた角度を保ったまま BC の長さをコンパスで測り取る。

(*)で確認したことから $DE:BC=1:4$ より $BC=4DE$ となるので、線分 DE を4倍に拡大したものが線分 BC となる。

保たれるようにセクターの目盛りが刻まれていることがわかる。そのためセクターにおいてはこの両脚に刻まれた目盛りの比が大きな意味を持つのである。

5. 「セクター」の授業概要

(1) 授業環境

日時：平成16年10月21、22、25、26日(65分×3時間)

対象：埼玉県立高校第二学年(2クラス)

準備：コンピュータ(Windows)、作図ツール(Cabri Geometry)

Microsoft Power Point、プロジェクター、実物投影機、授業記録用のデジタルビデオカメラ、コンパス、定木、セクター(厚紙で作られたもの)、事前・事後アンケート、ワークシート、授業資料

(2) 授業展開

< 1時間目 >

[目標]

ガンターのセクターにおける Line of Lines の目盛りの使い方を探ることによって道具の中に数学が盛り込まれ、その歴史的背景からセクターに対する興味・関心を高めることできる。

[授業概要]

まず生徒の興味を引くために1624年に出版された原典の口絵(図4)を見せ、左上の人は何をしているのかを想像で答えてもらった。



図4 原典の表紙絵

（生徒との対話）

教師：左上の人は何をしているのだと思う？

生徒：コンパスを持っている。

教師：どちらの手に持っている？両方コンパスかな？

生徒：えっ？両方？（周囲の生徒も両方コンパスだと思っていたので「両方コンパスじゃないの？」という意見が出て話し合い始めた。）

教師：実は右手と左手で持っているものは違っているんだけど、どうかな？

生徒：右手にコンパスを持っている。

次に、本来は木か真鍮で作られるセクターを紙で製作して生徒に配布した。生徒は思いも思いにセクターをいじっていたが、その中で「すごい」、「何かを挟んで使うのかなあ」という意見を言う生徒もいた。その表面から何が読み取れるか質問した。生徒の解答としては、「わからない」、「tangent」などの意見が出された。

その後、セクターは大航海時代の航海術における計算に使用され、値を線分の大きさとして捉える道具であったことを紹介した。続いてセクターの原理を探るために原典解釈を行った。セクターの原理においては両脚の目盛りの取り方が重要なポイントであるが、生徒自身に気づいてもらいたかったのでその原理を理解する例として最も簡単な



図 5 セクターの操作をする生徒

Line of Lines という目盛りを用いて、原典に書かれている「与えられた比で線分を拡大・縮小する操作」を生徒に行ってもらった（図5）

授業では線分Aが与えられていて、その線分Aと線分Bの比が3:5となるような線分Bをセクターとコンパスを用いて作図した。そしてその操作が正しいことを生徒と確認し、なぜその操作が正しいのかを考えた。

その答えを原典にある三角形の相似を利用した証明を生徒と一緒に行うことで生徒はセクターの原理を学習することができた。この原理を理解できればセクターを使いこなすことができるが、目盛りはLine of Lines だけではないので他の目盛りの意味を探ってもらった。（図6）



図 6 証明に取り組む生徒

なかなか答えにくい質問だったので、教師側から Line of Superficies という目盛り

注目するように促し授業の最後に原典での使用方法を説明した。それは任意に定めた線分と $1:\sqrt{2}$ の比にある線分を作図するという操作であり、なぜその目盛りを使うとそういう操作ができるかは宿題とした。

< 2 時間目 >

[目標]

Line of Superficies の目盛りがどのように打たれているか原典を元に解釈し、生徒が解釈学的営みを体験する。

[授業概要]

最初に 1 時間目の復習を兼ねて任意に定めた線分 A と 3:5 の比にある線分 B を作図する操作を教師の援助なしで生徒に操作させることで追体験を促した。そして Line of Superficies を用いて任意に定めた線分と $1:\sqrt{2}$ の比にある線分をセクターを用いて作図できることを確認した(図 7)。その証明の時には、生徒から正方形を用いた証明法が発表された。



図 7 Line of Superficies の復習

2 時間目の主要なテーマはそのような平方根の作図がなぜ可能になるのか原典の英語を教師が和訳をしたものを生徒と共に解釈することであった。その過程で比例中項を用いることでその作図が可能になることを学んだ。

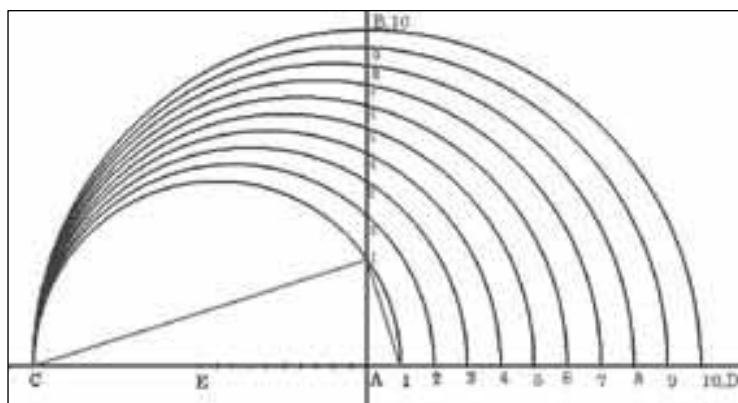


図 8 Line of Superficies の分割

Line of Superficies の分割の説明には原典の英語を和訳し、その文章どおりに目盛りの作図を生徒と行った。この時、生徒はコンパスを用いて作図し、教師はプロジェクターを授業で用いていたので作図ツールである Cabri Geometry を用いて作図をした(図 8)。

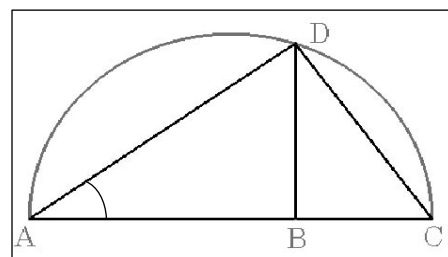


図 9 比例中項の作図

この作図の意味を理解するためには比例中項の理解が欠かせない。(図 9)そのために比例中項の証明を事前課題として生徒に課しておいた。その事前課題とは右図において線分 AB,BC の比例中項が線分 BD となることを証明することであ

る。つまり $BD^2 = AB \cdot BC$ を示すことだが、三角形の相似条件を久しぶりに思い出す生徒が多かったこともあり、なかなか証明がはかどらなかった。しかし比例中項は3時間目も使うため、この証明に時間をかけて生徒の理解をしっかりとしたものになるまで丁寧に行った。そしてその証明を終えた後に、実際に比例中項の考え方を利用して Line of Superficies の目盛りの間隔が平方根の比になっていることを証明を通して確認した(図10)。



図10 Line of Superficies の証明

平方根の作図が可能なのだから次は立方根の作図が可能になるのではないかと推測できるのでその Line を探すことにした。しかし証明に大幅に時間を割いたためどの Line が立方根の作図を可能にするかは3時間目に考えることにした。

この立方根の問題を解くことはギリシアの3大作図問題に挑むことであり、3つの問題のそれぞれは定木とコンパスでは作図できないことが証明されていることを生徒に伝えた。このセクターを使えば3大問題の一つである倍積問題を解くことができることはなぜなのかを考えることを次の授業までの課題として2時間目を終えた。

< 3時間目 >

[目標]

Line of Solids の目盛りを使うことで立方根が求められることを原典解釈を通じて学び、ギリシアの三大作図問題の一つである立方体の倍積問題に取り組む。

[授業概要]

3時間目の授業では Line of Solids の目盛りを使ってどんなことができるのか、またなぜそういったことができるのかという理由を探ることとした(図11)。

まず1、2時間目に扱った Line でどんなことができるのかを生徒に確認させた。その過程で Line of Superficies の目盛りには平方根が関係していることを復習した。

次に2時間目の終わりに時間の関係で3時間目にずらした立方根の問題を扱った。これは Line of Solids を

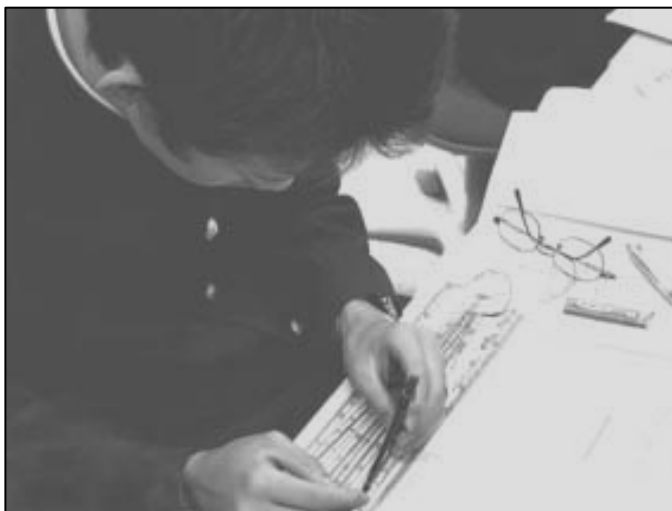


図11 目盛りの間隔に注目

使うと立方根の作図が可能になるが、それがなぜかという問題である。この問題の解法には2時間目でも扱った比例中項を2回使うことが求められたが、ここで一つの問題が持ち上がった。それは Line of Lines と Line of Superficies の例題を解いたときにはセクターを用いて得られた線分の長さが、本当に求めたい長さかどうかは容易に確かめることができた。ただ3時間目に扱う Line of Solids の例題は立体の体積を扱う問題なので、確認するのが困難であった。そこでその確認の方法として生徒の前で実験をすることにした。

- .立方体 A の一辺をコンパスで測る。
- .そのままセクターの Line of Solids の目盛り 1 に合わせてセクターを広げる。
- .その広げた角度を保ったまま、Line of Solids の目盛り 2 の長さをコンパスで測る。
- . で測った長さを一辺とする立方体 B を作る (事前に作っておいた) 。
- .立方体 A に蠟の粒子を満杯になるまで流し込み、満杯になったらそれを立方体 B に移す。
- . の作業を 2 回行う。

実験の目的は「ある立方体の2倍の体積を持つ立方体の一辺を本当にセクターで作図可能かどうかを確認すること」とし、用意したものはプラスチックで作られた2つの立方体 A,B (B は A の体積の2倍になっているようにあらかじめ作っておいた) と、蠟の微粒子 (本来は水などの液体がよいが、こぼすといけいので水に準ずるものとして選択した) を準備した。



図 12 実験中の生徒

実験の手順は以下のように行った。この手順では生徒と対話をしながら実験を進めることを重視した。実験の結果としては立方体 A に入れられた2杯分の粒子はちょうど立方体 B を満杯にした。この結果を受けて考察を行うと、立方体 A と B の一辺をそれぞれ a,b とすると $b^3 = 2a^3$ となるからセクターを用いて $b = \sqrt[3]{2}a$ となる b を作図したことになる。

しかし立方根の作図は定木とコンパスだけでは不可能なことは2時間目で既知のことであるため、セクターではどのように求めているのか考えた。比例中項を2回使うことでこの問題を解くことができる。証明は割愛するが右の図に

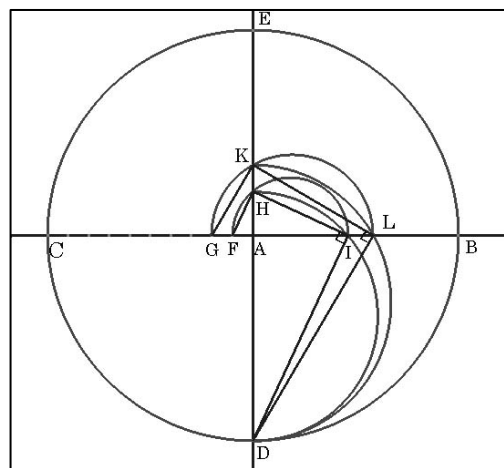


図 13 Line of Solids の証明

において $AI:AL=1:\sqrt[3]{2}$ となることを生徒は証明することができた。しかし証明の中では図13で点I,Hを同時に定めることは定木とコンパスだけでは不可能であるから特殊な道具が別に必要であることを説明した。

最後にまとめとして、セクターはサインやタンジェント、コサインなどの三角比の値や、金属の配合の比率(Line of Mettals)、漸長緯度目盛り(Line of Meridian)により航海術における応用できることを紹介した。この3日間の授業では解読できなかった目盛りがたくさんあるから今回はセクターという道具を取り上げたが、セクターだけでなく身の回りには数学が隠されている道具がたくさんあり、その考案には様々な歴史があることを知って欲しいと伝えて3回の授業を終えた。

6. 議論

課題1：数学史の原典解釈や追体験を取り入れた授業、セクターを操作する数学的活動を通して、生徒が数学的な道具に歴史を感じるか。

事後アンケート（3時間の授業を受けてみた感想）に対する生徒の回答

セクターの使い方やその原理を通して数学の歴史に少し触れることができたと思う。今までとはちがった数学を学ぶことができたのでよかったと思う。

はじめは何をやっているのかよくわからなかったが、授業を受けて、いままでの数学とは違った道具や考え方をを用いることで、数学の歴史について学べることができたのでよかった。

机上の勉強しかやったことがなかったので、実学的なものにふれたのはとても新鮮だったし、学んでいてどう役に立つのかわからなかった数学が昔はとても役立っていたことが分かってとてもいい経験になった。

生徒 ~ の回答を総括すると、各生徒はセクターという数学的な道具を原典解釈することを通して、数学の歴史を感じている様子がうかがえる。特に生徒 ~ の回答からは生徒がそれまで作り上げてきた数学という文化に対して、セクターという道具を介して大航海時代の数学に触れるという異文化体験をすることで数学観の変容が見られる。

また生徒 ~ の回答からは今まさに学んでいる数学と実生活との結びつきを強く感じている様子がわかる。そして授業を通して道具に埋め込まれた社会歴史的文化的な機能を認識することができたといえる。

事後アンケート（授業をうけて、数学に対してあなたが変わったと思うことを自由に書いて下さい）に対する生徒の回答

今までは計算ばかりだと思っていたが、セクターを使うことによって歴史を感じることができた。

数学の見方が変わった。

「セクター」という道具を知って数学はすごいものと思いました。「セクター」の証明

をしていくのが段々となるほど、なるほどと理解していくのが楽しかった。
 単にセクターを使って、図形を示すだけでなく、それを証明するという外見だけでなく中からわかった気がした。
 数学の歴史を学ぶのも重要だと思った。
 少しだけ理解不能な数学という教科に興味を抱いた。
 数学のいろいろな法則にはかくれたものがいっぱいあり、計算だけではないと思った。
 他の昔の測量技術についても知りたくなった。

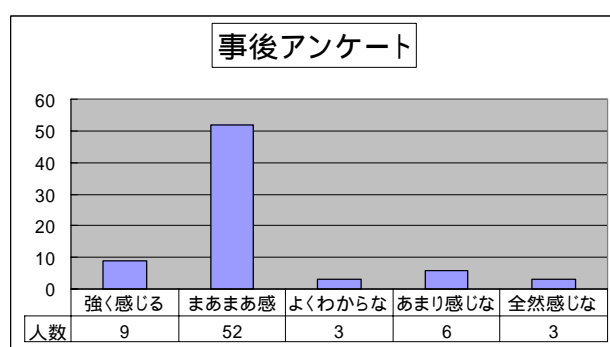
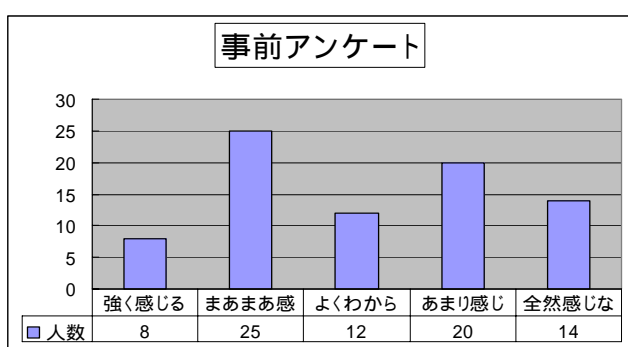
生徒、の回答からは数学は計算ばかりだというそれまでに作り上げられた数学に対する認識に変容が見られる。これはセクターが使われた時代の数学と現在生徒が学んでいる数学の2つを比較することで、道具のもつ数学のすごさを感じ取っているものと考えられる。

生徒、の回答からは数学という教科そのものに対する生徒の考え方の変容として捉えることが可能であると筆者は考える。特に生徒はそれまで理解不能であった数学に対してセクターを用いた授業を受けた後、少しではあるが興味を持ち始めたことは数学の理解に対する重要な一歩となりうると筆者は考察した。

生徒、の回答からは道具に埋め込まれた数学を理解している様子である。特に生徒は「証明する」という数学的な活動を通して、数学を外見からではなくその内側から、そしてより本質的に理解しているものと考えられる。

生徒の回答からセクターを足がかりとして他の道具に対する興味・関心が新たに生み出されていると筆者は考える。

これまでの議論を裏付けるデータとして、「数学に歴史を感じるか」という質問に対する生徒の回答をグラフ化したものを下に挙げる。



このグラフにおいて強く感じるを1、まあまあ感じるを2、...とおくと事前アンケートの平均値は3.089であったが、事後アンケートの平均値は2.205に減少した。これは数学に歴史を感じる生徒が増えたことを表している。

課題2：課題1をうけて、数学を歴史に沿って学ぶことが重要であることを生徒が認識できるか。

事後アンケート（数学を歴史に沿って勉強する価値があると思いますか）に対する生徒の回答

どのようにして数学ができあがったのか知るとおもしろい。
知識として自分に積み、その事自体に価値があると思う。昔の知恵を学ぶことによって今の数学に応用する。
今の数学は昔の人々の考えた道具や公式を使っているから。
単に公式を覚えて使うだけでなく、中からやっていくことは重要だなあと思った。
昔の人が考えていることが分かるから。
昔の人の苦労や頭の良さを知るため。
昔の人の考え方を学べる。
数学をただ勉強するよりも、歴史に沿って勉強するほうが興味を持てるし、数学の大事さやすごさがわかる。

生徒、 の回答から数学の発展過程を理解することが必要であることを認識していることがわかる。その理由として生徒 は何かを学習するときには「興味」という尺度が重要であることを自覚している。そして興味があるのとないのでは、数学の有用性の感じ方に違いがあることを指摘している。

生徒、 の回答からは昔の数学が今の数学に応用できること、そしてその価値を理解しているようである。また「自分の知識として歴史が層のように積もること」を表現したことに筆者は驚いている。生徒 は道具や公式それ自身が歴史を持っていることを学んでいるのは数学の学習においてとても重要な視点だと考える。

生徒 は公式を暗記のように意味を欠落した状態で覚えることに対して否定的で、「なぜそうなるのか」、「そうするとなぜ意味があるのか」という「なぜ」という自己の内面への問いかけが大事であると考えているようである。

生徒、 の回答からは昔の人が使ったり、考えていた数学との類似点や相違点を探ることが重要であることを指摘している。その理由として昔の人の苦労や考え方を学べるからと述べている。これはセクターが礒田(2003)の言うように「他者の立場の想定に役立つ道具」として文化的価値、教育的価値があるものとして有用であると筆者は考察する。

以上2つの課題に対する議論から、道具の操作による数学的活動を取り入れた授業を通して、数学学習における道具の利用が生徒の数学観の変容に貢献できるという研究目的がおおむね達成できた。

7. おわりに

本研究では道具の操作による数学的活動を取り入れた授業を通して、数学への興味・関心のさらなる喚起を図るとともに、数学を人間の文化的営みとして捉えることにより、数学の学習における道具の利用が生徒の数学観の変容に貢献できることを考察することができた。

しかしその一方で、事後アンケートの中では上記の設問に対して、無回答が目立った。また数学を歴史に沿って勉強することに価値を見い出していない否定的な意見が見られた。これは筆者の授業における説明不足や不手際が少なからず影響しているものと思われる。

今回の授業では高校数学との関連があまり強くなかったという反省点があったので、今

後は授業で扱うことができなかつた Line についてさらなる原典解釈を通して、三角比などの高校数学との関連が強い単元を対象とした授業が展開されることが課題として考えられる。そして今回は生徒の数学観に変容がみられたかどうかを考察したが、このような授業を通して教師の数学観には変容がみられないのか、みられるとしたらどの程度の変容がみられるのかといった教師に対する調査も必要になってくると考えられる。

謝辞

今回の授業研究の実施に際して、埼玉県立春日部高等学校の片野秀樹先生、早乙女勤先生をはじめとする数学科の先生方には、多大なるご協力と共に、貴重なご指導をいただきました。心より御礼申し上げます。

注) 本研究は、平成 16 年度科学研究費、特定領域研究(2)課題番号 15020214「数学用機械と JAVA による移動・変換と関数・微積ハズオン教材の WEB 化研究」(研究代表者 礪田正美)において開発された歴史的道具を前提にして、平成 16 年度科学研究費、基盤研究(B)(2)課題番号 14380055「数学の文化的視野覚醒と新文化創出のための教材・指導法開発研究」(研究代表者 礪田正美)の一環として行われた。

<引用・参考文献>

- 【1】Edmund Gunter(1971).*The description and use of the sector, the cross-staffe, and other instruments*, English experience 422
- 【2】文部省(1999).*高等学校学習指導要領解説：数学編，理数編*.実教出版
- 【3】H.-C.フライエスレーベン,坂本賢三(1983). *航海術の歴史*, 岩波書店
- 【4】飯田嘉郎(1984). *航海術史*.出光書店
- 【5】茂在寅男(1967). *航海術:海に挑む人間の歴史*,中央公論社
- 【6】沓名景義, 坂戸直輝(1996). *海図の知識*,成山堂書店
- 【7】礪田正美(2001)．異文化体験からみた数学の文化的視野の覚醒に関する一考察；隠れた文化としての数学観の意識化と変容を求めて，*筑波数学教育研究* 20，39-48．
- 【8】礪田正美(2002)．解釈学からみた数学的活動論の展開；人間の営みを構想する数学教育学へのパースペクティブ，*筑波数学教育研究* 21，1-10．
- 【9】礪田正美(1987)．数学学習における数学史の利用に関する一考察，*筑波大学附属駒場中・高等学校研究報告*，26，157-174
- 【10】諏佐洋一(2004). 歴史的道具「比例コンパス」を用いた数学的活動による授業研究：ガリレオの軍事的コンパスを題材として。「確かな学力」の育成と道具を用いた数学教育 中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11).*筑波大学数学教育学研究室*,83-95.