

原典を用いた場合の数・確率の学習

カルダノ「サイコロ遊びについて」を題材として

筑波大学大学院修士課程教育研究科
渡辺 悠希

章構成

要約

1. はじめに
2. 研究目的・研究方法
3. 「サイコロ遊びについて」の教材化
4. 「サイコロ遊びについて」を用いた授業の概要
5. 考察
6. おわりに

本研究では、カルダノの「サイコロ遊びについて」の原典解釈を通して、「場合の数と確率」の分野に興味・関心を持つことと、統計的確率を扱った授業展開をすることにより確率の意味について理解を深めることを目標として授業実践をした。その結果、上記目標に沿った変容が確認された。

キーワード：場合の数、確率、数学史、原典解釈

1. はじめに

平成14年度高等学校教育課程実施状況調査報告書 - 数学 - (2004)によれば、「教師の意識としては、順列や組合せの考えを用いて、場合の数を能率的に数えあげることのような学習内容については、生徒が比較的理解しやすく、興味を持っていると考えている傾向が見られる」とある。これに対し、「生徒の意識としては、順列や組合せの考えを用いて、場合の数を能率的に数えあげることのような学習内容については、内容はわかりにくく嫌いであるという傾向が見られる。」とあり、教師が考えているほど生徒は「場合の数」の学習に興味・関心を持っていないことがわかる。「場合の数」に続いて学習する「確率」においても、生徒の興味・関心の低さが示されている。

本研究では、数学史(確率論史)の原典解釈を取り上げた授業を行うことにより、生徒が「場合の数」・「確率」の分野に興味・関心を持つことを主な目的とする。数学史の原典解釈を授業で取り上げるにあたって、磯田(2002a)は、「実際の歴史上の原典を開き、その原典を記した人の立場や考え方を想定し、その人に心情を重ねて解釈すると、今、自分たちの学ぶ数学が、異なる、時代・文化背景に生きた人々によって、まるで異なる時代様式で研究され、表現されていたことが体験できる。」と述べ、解釈学的営みとしての数学的活動を授業に位置づけている。

また、前述の実施状況調査報告書では、「確率」の学習指導上の留意点として、「確率の意味の指導を重視すること」をあげている。数学的確率において、「同様に確からし

い という根元事象の確率が等しいことを前提とするところに、理解の難しさがある。」とあり、これは高校生にも当てはまるという結果が示されている。これを受けて、「高等学校においても、いわゆる統計的確率と数学的確率の調和を図りながら、確率の意味の指導を充実することが重要である。」と述べている。

解釈学的営みとしての数学的活動による授業の有用性は、多くの先行研究で例証されている。その中で「確率」の分野に関したのものとしてはパスカルの数三角形を題材とした平島（2005）の研究がある。しかし、統計的確率は扱われていない。

以上をふまえて、筆者は、数学史を用いた授業によって、生徒が「場合の数と確率」の分野に興味・関心を持つことと、統計的確率を授業で扱うことにより、確率の意味について理解を深めることを目標として授業実践した。

2. 研究目的・研究方法

(1) 研究目的

本研究では、カルダノの「サイコロ遊びについて」の原典解釈をすることにより、生徒が「場合の数と確率」の分野に興味・関心を持つことと、統計的確率を授業で扱うことにより、確率の意味について理解を深めることを目的とする。ただし「原典」とは、翻訳文献まで含めることとする。

上記の目的を達成するために、以下の課題を設定する。

課題1：本授業を通して行われる解釈学的営みによって、「場合の数と確率」の分野に興味・関心を持つことができるか。

課題2：生徒が実際にサイコロを振り統計的確率を求めることにより、数学的確率における「同様に確からしい」という前提に妥当性を感じることができるか。

(2) 研究方法

カルダノの確率論に関する原典「サイコロ遊びについて」などを元にオリジナルな教材を作成し、授業を行う。授業テキストとビデオによる授業記録、及び事前・事後アンケートを基に考察する。

3. 「サイコロ遊びについて」の教材化

確率の研究は、400年以上前のルネサンス期のイタリアに起源すると言われている。遡ること12、13世紀の北イタリア、ジェノバ・ピサ・ヴェネチア三港では、十字軍輸送帰りの空船による地中海東方貿易が栄えていた。北イタリアの発展を享受した人々は賭博に親しんだと考えられる。3次方程式の解公式を出版したことで著名なジロラモ・カルダノ（1501 - 1576）もその時代を生きた。彼は、サイコロやカードを用いた賭け事を愛し、一時は医者や大学などに勤めながら、財産や子どもを失うなど劇的な生涯を送ったことでも知られている。



カルダノの肖像画

カルダノの原典の英語訳である「The book on games of chance (サイコロ遊びについて)」について見ていく。「サイコロ遊びについて」は、32章からなる。この中で確率に関するものは、9章、11～15章、31章、32章であり、他はゲームの種類、ルールや心構えなどを話題にしている。今回の授業では11章、12章、14章、31章を扱う。

- | | |
|--|-------------------------------|
| 1. ゲームの種類について | 2. プレーの条件について |
| 3. 誰といつゲームをすべきか | 4. プレーの効用と損失 |
| 5. なぜ私は賭事をするのか | 6. 賭事の基本原則 |
| 7. 吊るされたサイコロ箱とイカサマ・サイコロ | 8. プレーするための諸条件 |
| 9. 1個のサイコロ投げについて | 10. なぜ賭事はアリストテレスに非難されたか |
| 11. 2個のサイコロ投げについて | 12. 3個のサイコロ投げについて |
| 13. 2個または3個のサイコロ投げに対する6点までと6点以上の数の構成について | |
| 14. 組合せられた得点について | 15. このことについてなされる誤り |
| 16. カード・ゲームについて | 17. この種のゲームにおけるいかさまについて |
| 18. プリメロにおける習慣的な約束 | 19. プロメロにおける得点もしくは数の多様さについて |
| 20. プレー中の運について | 21. 投げるときの臆病について |
| 22. ゲームの二重分類について | 23. 熟練した腕をためず機会のあるカード・ゲームについて |
| 24. カード・ゲームとサイコロ・ゲームの違いについて | |
| 25. カード・ゲームについて | 26. ルールを教える人はうまく試合をするか |
| 27. 技以上の技に関して何かあるだろうか | 28. 遠大な計画, 判断, 手順について |
| 29. プレイヤーの性格について | 30. 古代人の間の偶然ゲームについて |
| 31. タリ・ゲームについて | 32. この書の結論 |

「サイコロ遊びについて」の各章の題名

・11章、12章について

11章では2個のサイコロ投げ、12章では3個のサイコロ投げが話題にされており、カルダノは場合分けをすることにより出目の総数を求めている。生徒は、場合の数の積の法則によって出目の総数を求めた後、原典解釈をしながらカルダノの求め方を追体験する。

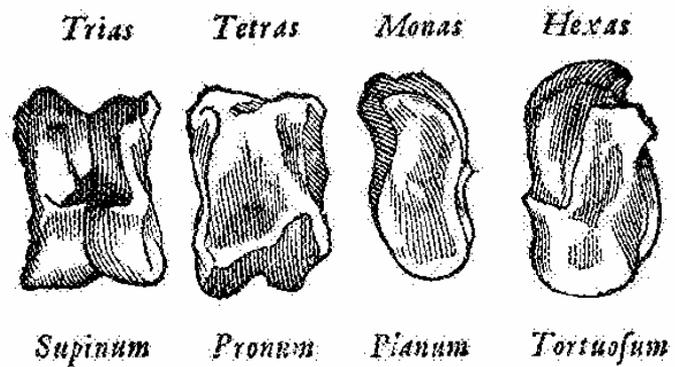
・14章について

14章では2個または3個のサイコロを振り、ある特定の目が出たら勝ちというゲームが話題にされている。生徒は、このゲームの設定で実際にサイコロを振り、統計的確率を求める。また、この章でカルダノは、「勝つ場合の数：負ける場合の数」として、勝ち目を比で表している。生徒は原典解釈により、カルダノが勝ち目を比で表したことを知る。勝つ場合の数を a 、負ける場合の数を b とすれば、勝ち目は $a:b$ 、勝つ確率（数学的確率）は、 $a/(a+b)$ と表される。両者とも「同様に確からしい」を前提にしている。

・31章について

31章ではタリ・ゲームという古代の遊びが話題にされている。タリ・ゲームは、タルス（talus、複数形 tari）と呼ばれる羊の踵の骨を投げることによって行われる。古代のギリシャ人やローマ人は、4つのタルスを投げて、4つのタルスから異なる4面が出現したとき、ヴィーナスと呼ばれ最高のものとした。生徒はカルダノの方法に従って場合の数を求める活動をする。また、カルダノはこの章で、タルスの投げの結果1つ1つは $1/256$ の確率を

持っているとは仮定している。つまり、タルスの各目が「同様に確からしい」確率で出現すると仮定しているが、実際はそうではない。タルスの各目の出る確率が数学的確率によっては求めることはできないが、統計的確率によってなら求められることを生徒に気づいてもらう。



タルスの4つの面と目の数の入れ方。
左から 3,4,1,6 (下の文字は面の名称)

4. 授業概要

(1) 授業環境

日時：平成 17 年 11 月 9 日、14 日、16 日 (45 分×3 時間)

対象：栃木県立高等学校第 2 学年 (1 クラス 39 人)

準備：コンピュータ (Windows)、ビデオプロジェクタ、授業記録用のデジタルビデオカメラ、サイコロ、タルスの模型 (紙粘土で作られたもの)、事前・事後アンケート、授業テキスト、ワークシート

(2) 授業展開

< 1 時間目 >

【ねらい】

原典解釈をすることにより、カルダノが場合の数をどのように求めたのかを追体験する。

【授業の流れ】

カルダノの人物紹介をし、次に、3 時間の授業で扱う「サイコロ遊びについて」に関心を持ってもらうために、同著の全 32 章の中で確率に関連する章はどこかを考えてもらった。

原典との比較のため次の問題を解いてもらった。

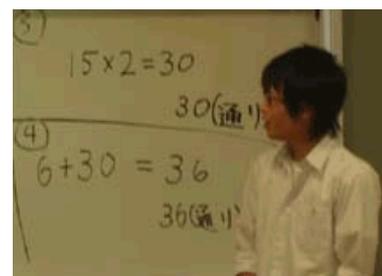
(1) 2 個のサイコロを投げたとき、起こりうる場合の数は全部で何通りありますか。

(2) 3 個のサイコロを投げたとき、起こりうる場合の数は全部で何通りありますか。

生徒は場合の数の積の法則を使い解答した。

2 個のサイコロの場合について原典の穴埋めをしてもらい、黒板で発表してもらった。

2 個のサイコロを投げた場合、同じ目の出るのは (6) 通り、異なる目の組合せは (15) 通りであるから、2 回重複して数えると (30) 通り、全部で (36) 通りの投げの結果が存在する。



発表の様子

3個のサイコロの場合について原典の穴埋めをした。2個の場合とは違って、苦戦している生徒が多く見られた。その理由としては、原典が普段解く問題には見られない表現で書かれていることがあげられる。生徒たちは、カルダノが何を言おうとしているのかを解釈しながら場合の数を求めていった。また、その解釈について生徒たちが討論している様子が見られた。



原典解釈について討論

3個のサイコロが同じ目を出す投げでは、前章での2個のサイコロ投げで同じ目を出すのと同じではあるが、サイコロが1個ふえるという点だけが違う。かくして(6)通りの目の出方がある。3個のサイコロを投げて、2個が同じ目で残り1個が異なる目を出す投げの数は(30)であり、これらの投げのおのおのは(3)通りの方法で起こるので、起り方は(90)通りある。さらに3個とも異なる目を出す投げの数は(20)であり、おのおのは(6)通りの方法で起るから、起り方は(120)通りある。かくしてそれらすべての目の出方は(216)通りである。

(生徒との対話)

教師：カルダノは3個のサイコロ投げで、どのようにして起こりうる場合の数を求めているでしょうか。

生徒：カルダノは、3個とも同じ場合、2個が同じ場合、3個とも違う場合を求めた。

教師：そうだね。カルダノは場合分けをすることによって、起こりうる場合の数を求めました。

生徒は原典を解釈することにより、カルダノの求め方を追体験することができた。

タリ・ゲームについて模型を使いながら説明した。その模型を生徒に手にしてもらい、タリ・ゲームの理解の一助としてもらった。そして、カルダノが求めた場合分けを表形式で出題し解答してもらったが、時間が足りなかったので、残りは宿題とした。

	組合せ	順列
型	4	4
×型	12	48
××型	6	36
×型	12	144
×型	1	24
計	35	256



模型を手に取る生徒

< 2時間目 >

【ねらい】

実際にサイコロを振り統計的確率を求め、その後に数学的確率を求めることにより、数学的確率における「同様に確からしい」という前提を実感する。

【授業の流れ】

前時の復習をし、カルダノがどのように場合の数を求めたかを振り返った。

「カルダノは、サイコロ投げで、ある特定の目が出たら勝ちというゲームを研究しました。2個のサイコロを投げて、1か2か3がひとつでも出たら勝ちという場合を考えてみましょう。」として本時の導入をした。生徒は二人一組で、一人がサイコロを振り、もう一人が出目を記録した。50回振った時点で、統計的確率を求めてもらい黒板に値を書いてもらった。100回、200回でも値を求め、数値が変化していく様子を確認した。最終的に300回から400回振って求めた統計的確率を黒板に書いてもらい、生徒たちは自分たちのグループと他のグループの値が近い値を示していることを確認した。



サイコロを振る様子

投げた回数	勝ち目が出た回数	統計的確率
50	34	0.680
100	68	0.680
200	142	0.710
350	263	0.751

(最後は少数第4位を四捨五入して、少数第3位まで求めましょう)

生徒が求めた統計的確率

0.7	0.73	0.86	0.75	0.76	0.72	0.76	0.71	0.74	0.74	0.78	0.746
0.7	0.76	0.6	0.77	0.66	0.717	0.84	0.78	0.68	0.751	0.62	0.74
0.86	0.78	0.86	0.78	0.72	0.79	0.72	0.74	0.78	0.74		

各グループが求めた統計的確率 ([50 回] [300 から 400 回])

生徒たちは先ほどの問題における数学的確率を求め、自分たちが求めた統計的確率とその値に近いことを確認した。

$$1 - \left(\frac{3}{6} \times \frac{3}{6}\right) = 1 - \frac{9}{36} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$$

生徒が求めた数学的確率

(生徒との対話)

教師：サイコロの出る目の確率は、実際に投げたり、計算で求められますが、タルスの出る目の確率を求めるにはどうすればよいでしょう。

生徒：タルスの場合は、計算では求められないけど、実際に振ることで求められる。この対話によって、タルスのように不規則な形の物でも、統計的確率なら求められることを確認した。

「次回は、本時に扱ったゲームをカルダノがどのように研究したかを見ていきます。」
と伝えて授業を終えた。

< 3 時間目 >

【ねらい】

前時に扱ったゲームを、カルダノがどのように研究していったかを原典解釈しながら見ていく。そこでカルダノが、場合の数から「勝ち目」を比で表したことに気づく。

【授業の流れ】

前時までの内容を振り返るとともに、数学的確率と統計的確率のそれぞれの長所、短所を説明した。

カルダノは 2 個のサイコロ投げで、ある特定の目が出たら勝ちというゲームについて研究した。カルダノが求めた場合の数を表形式で出題し、生徒に解答してもらい、黒板で発表してもらった。

2 個のサイコロ投げ	場合の数	計
少なくとも 1 個 1 の目が出る場合	11	11
1 の目が出ず、少なくとも 1 個 2 の目が出る場合	9	20
1 と 2 の目が出ず、少なくとも 1 個 3 の目が出る場合	7	27
1 ~ 3 の目が出ず、少なくとも 1 個 4 の目が出る場合	5	32
1 ~ 4 の目が出ず、少なくとも 1 個 5 の目が出る場合	3	35
1 ~ 5 の目が出ず、少なくとも 1 個 6 の目が出る場合	1	36

先ほど求めてもらった表を使って、原典の穴埋めをしてもらうと同時に、生徒は原典解釈をしていくなかで、カルダノが場合の数を求めることにより、勝ち目を「勝つ場合の数：負ける場合の数」という比で表したことを知った。

もしも誰かが“私は 1 の目か、2 の目か、3 の目を出したい”といったとしたら、(27) 通りの都合な投げが存在し、かつ全ての場合の数は (36) であるから、これらの点が出ないのは (9) 通りである。それゆえ勝ち目は (3) : (1) である。だから、4 回の投げで、もしも運が等しければ、1 の目か 2 の目か 3 の目のどれかが 3 回は出現し、あとの 1 回はこれらの目が出ないであろう。それゆえ 1 か 2 か 3 の目を出したいと思うプレイヤーが 3 デュカを賭け、他のプレイヤーが 1 デュカを賭けたとしたら、前者は 3 倍多く勝って 3 デュカを得るであろう。そして他のプレイヤーは 1 回だけ勝って、その場合だけ 3 デュカを得るであろう。それで、4 回 1 まわりの投げで、彼らはずねに同等であろう。このことは同等の条件でゲームを争う論理的条件なのである。

カルダノが求めた「賭けにおける一般的規則」を示し、全体で確認した。

全事象の場合の数、賭ける場合の数を求めて、
(賭ける事象の場合) : (全事象 - 賭ける事象の場合)
の比を求めてプレイヤー相互の賭金を置くべきで、
その結果人々は同等な条件でゲームをしようのである。

本時のはじめに求めた、2個のサイコロ投げでの場合の数から、生徒は「勝つ確率」と「勝ち目」のそれぞれを求めた。

2個のサイコロ投げ	場合の数	勝つ確率	勝ち目
少なくとも1個1の目が出る場合	11	11/36	11:25
少なくとも1個1か2の目が出る場合	20	5/9	5:4
少なくとも1個1～3の目が出る場合	27	3/4	3:1
少なくとも1個1～4の目が出る場合	32	8/9	8:1
少なくとも1個1～5の目が出る場合	35	35/36	35:1
少なくとも1個1～6の目が出る場合	36	1	必ず勝つ

カルダノが実際の賭事では一文無しとなり、末子も身を滅ぼすという人生の苦難に出会ったこと、(ある事柄が起こる場合の数) / (すべての場合の数) という現代的な数学的確率の定義は、1718年に出版されたド・モアブル著「偶然論」において初めて定義されたこと、カルダノより始まった確率に関する研究が、現代では社会の様々なところで応用されていることを伝えて授業を終えた。

5. 考察

(1) 課題1に対する考察

課題1：本授業を通して行われる解釈学的営みによって、「場合の数と確率」の分野に興味・関心を持つことができるか。

事後アンケート抜粋(生徒の記述)

質問：「サイコロ遊びについて」を用いた授業を通して場合の数・確率に対する見方や考え方が変わったか、感想等

昔から様々な人々が研究してきたようですが、その人達もさぞかし苦労したんだろうと思います。しかし、現在では至る所で確率が使われているのでその研究はすばらしいものだと思います。

今までに受けたことのないものだったのでとても新鮮でした。様々な知識が増えて良かったと思います。

現在、自分たちが習った場合の数や確率の解き方の他にも解き方はいくつかあって、しかもそれが400年以上前に考えられたものだったりして、すごいと思いました。

カルダノのやり方と現代のやり方をわけてやったことにより、今まで現代のやり方でしか解いたことがなかった自分はカルダノのやり方を取り入れることによって確率を求めるときの視野が広がったと思う。

今、時分たちがやっている求め方と、昔の人の求め方の順序が違うのに驚いた。

確率が以前よりも身近なものに感じられた。

授業後に行った生徒へのアンケート内容(上記)をもとに課題1について議論していく。生徒は、カルダノの「サイコロ遊びについて」を用いた授業を通して、確率を研究してきた先人の営みに思いを馳せ、そこにあったであろう苦労を想像している。そして、その研究成果が現在では至るところで使われているのですばらしいと言っており、

確率の分野に対する関心を強く示していることが読み取れる。生徒 A は、歴史的原文を解釈するという今までにない体験を「新鮮」という言葉で表しており、場合の数、確率の分野について興味を持って味わったと言える。生徒 B は、カルダノが場合の数をどのように求めていったかを追体験し、教科書での解き方と比較することにより、その違いを驚きを持って感じ取った。生徒 C は本授業を通して確率が身近なものに感じられたと言っており数学観が変容したことが読み取れる。

以上より、本授業を通して行われる解釈学的営みによって、「場合の数と確率」の分野に興味・関心を持つことができたと考えられる。

(2) 課題2に対する考察

課題2：生徒が実際にサイコロを振り統計的確率を求めることにより、数学的確率における「同様に確からしい」という前提に妥当性を感じることができるか。

事後アンケート抜粋（生徒の記述）

質問：確率に対する見方や考え方が変わったか、感想等

今まで単に計算で出してきた確率も実際に調べてみることで、より理解が深まった。

実際に確率を求めてみることでわかりやすかった。

今までは何気なく確率の問題を解いていたけれども、よくよく考えると、とても奥が深く、とても広い分野において活用できるということがわかりました。

サイコロ投げの確率が今回、実際に試行を行ってみた結果、ある程度確からしいということがわかった。やはりそういう点では数学はすごい学問だなと感心せざるをえなかった。

授業後に行った生徒へのアンケート内容（上記）をもとに課題2について議論していく。生徒 A は、実際にサイコロを振り統計的確率を求め、さらに数学的確率も求める授業内容を肯定的に捉えている。このような意見は、多くの生徒から得られた。生徒 B は、確率の奥深さを感じ取り、確率についての理解を深めることができたと言える。生徒 C は、数学的確率における「同様に確からしい」という前提に妥当性を感じるとともに、不確定事象を扱う数学に偉大さを感じている。

以上より、本研究の授業実践において課題2は達成されたと言える。

6. おわりに

本研究では、カルダノの「サイコロ遊びについて」の原典解釈をすることにより、生徒が「場合の数と確率」の分野に歴史的な観点や内容面から興味・関心を持つことと、サイコロを実際に振り統計的確率を授業で扱うことにより、数学的確率における「同様に確からしい」という前提に妥当性を感じることを確認できた。

数学史に触れるという機会は、まだまだ少ない。今回の研究を通して、数学史的な教養が数学を楽しむことや数学のよさに気付くという機会を与えてくれるということ、私自身も認識することができた。今後は、この教材を改善、発展させることにより、より多くの生徒に提供できるものとしていきたい。

謝辞

授業研究の実施に際して、栃木県立佐野高等学校の会田英一先生をはじめとする数学科の先生方から大変貴重なご意見ご協力をいただきました。この場を借りて厚くお礼申し上げます。

注

本研究は、文部科学省科学研究費特定領域研究(2)課題番号 17011014「代数・幾何・微積分の動的理解を促す「使える数学」教材サイトの開発に関する研究 数学用機械とJAVAによる移動・変換と関数・微積分ハンズオン教材のWEB化研究()」(研究 代表者磯田正美)による研究の一環として行われた。

引用・参考文献

- アイザック・トドハンター (1975, 安藤洋美[訳]). *確率論史: パスカルからラプラスの時代までの数学史の一断面*. 現代数学社.
- 安藤洋美 (1992). *確率論の生い立ち*. 現代数学社.
- 磯田正美 (2002). 解釈学からみた数学的活動論の展開: 人間の営みを構想する数学教育学へのパースペクティブ. *筑波数学教育研究*, 21, 筑波大学数学教育研究室.
- 磯田正美 (2002a). *数学的活動を楽しむ心を育てる, 課題学習・選択学習・総合学習の教材開発*. 明治図書.
- オア (1978, 安藤洋美[訳]). *カルダノの生涯: 悪徳数学者の栄光と悲惨*. 東京図書.
- 影山敬久 (2003). 確率の求め方: A、Bへ分けられるかけ金を考えよう. *研究授業シリーズ: 生徒が自ら考えを発展する数学の研究授業: この発問が発展のきっかけをつくる: 中学2年編*. 明治図書, p93 - 100.
- 釜江哲郎 (1985). 確率論の歴史: 1. ギャンブルから確率論へ. *数学セミナー*, 5, 日本評論社, p 58 - 63
- カルダノ (1977, 安藤洋美[訳]). *De Ludo Aleae*. *現代数学*, 1-6, 8, 10, 現代数学社.
- カルダーノ (1980, 清瀬卓, 澤井茂夫[訳]). *カルダーノ自伝*. 海鳴社.
- 国立教育政策研究所教育課程研究センター (2004). *平成14年度高等学校教育課程実施状況調査報告書: 数学: 数学*. 実教出版株式会社.
- 平島絡美 (2005) パスカルの数三角形を用いた授業研究 - 他者の立場の想定による数学と人間とのかかわり - : *中学校・高等学校数学科教育開発に関する研究 (12)*. 筑波大学数学教育研究室, p 220 - 233.
- 福間政也 (2004). 確率における学習過程の水準に関する研究. *修士論文*, 筑波大学.
- 福間政也, 磯田正美 (2003). 『確率論』の発生: ルネッサンス期のカルダノとガリレイによる賭博の研究. *教育科学, 数学教育*, 9, 明治図書.
- 文部省 (1998). *中学校学習指導要解説 - 数学編 -*. 大阪書籍.
- 文部省 (1999). *高等学校学習指導要解説数学編理数編*. 実教出版.
- Gerolamo Cardano (1961, Oystein Ore[訳]). *The book on games of chance*. Holt, Rinehart and Winston.