

科学系博物館における「変換」概念の学習可能性に関する研究

エッシャーを題材に

筑波大学大学院修士課程教育研究科

大和田 裕子

章構成

1. はじめに
2. 研究目的・研究方法
3. 敷き詰めにおける変換に注目した教材化
4. 敷き詰めにおける変換に注目した教具の解説
5. 敷き詰めにおける変換に注目した数学的解説
6. 敷き詰めにおける変換に注目した活動概要
7. 考察
8. おわりに

要約

本研究では、日常の事象を取り扱い、その中にある数学に触れる活動によって、「数学的活動(算数的活動)」をすることに楽しさを見出せるかを目的に考察を行った。敷き詰めにおける変換に注目した活動により、敷き詰めの面白さに触れた。また、それによって、数学を身近なものとして捉え、数学への興味・関心を高め、「数学的活動(算数的活動)」をすることに楽しさを見出したことが確認された。

キーワード：日常の事象、数学的活動（算数的活動）、合同変換

1. はじめに

「平成13年度小中学校教育課程実施状況調査報告書中学校数学」の生徒に対しての質問紙調査「ふだんの生活や社会に出て役立つと思った、思わなかった」において、以下のように考察している。「学年が進むにつれて、役に立たないと思う生徒が増えてくることをよみとることができる。数学の学習が学年が進むにつれての抽象度が高くなり、現実の生活から離れることがあるという理由で、以前から指摘されてきたことであり、それゆえに、その改善を加え指導をしてきたのであるが、依然としてこのような結果になっている。」としている。同様の結果が、高等学校でも得られている。本研究では、身の回りにある数学として、パズル・敷き詰め模様を扱う。それにより、数学を身近なものとして捉え、数学への興味・関心を高められるようにする。

また、「小学校学習指導要領算数編(1999)」において、算数科の目標に「活動の楽しさや数理的な処理のよさに気付き」とある。この活動とは、「算数的活動」を指しており、作業的・体験的な活動などの外的な活動や思考活動などの内的な活動といった、それぞれを主とするものがある。同様の文言が、中学校、高等学校の学習指導要領で述べられている。本研究では、敷き詰めにおける変換に注目した活動を行うことで、各々の

持つ図形の感覚に対応した「数学的活動(算数的活動)」をすることに楽しさを見出すことを主題として挙げる。

次に、小川(2003)は「科学系博物館の理科学習の資源としての有用性には、子どもたちの理科に対する興味・関心の高揚、科学系博物館への期待の喚起、学校外施設に対する興味・関心の高揚、さらに、子どもたちが科学に対し広い視野を持ち、学習の資源を求めていく態度の形成があると考えられる。」と述べている。これは、数学においても同様と考えられる。よって、本研究では、参加者の算数・数学への興味・関心を高め、その後の学習につながる教材開発を行う。

以上を受け、本研究では、日常の事象を扱い、その中にある数学に数学的活動(算数的活動)を通して触れることで、「数学的活動(算数的活動)の楽しさ」を体験し、数学への興味・関心を高めることを目的とする授業を提案する。

2. 研究目的・研究方法

(1) 研究目的

日常の事象を取り扱うことで、数学を身近なものとして捉え、数学への興味・関心を高め、「数学的活動(算数的活動)」をすることに楽しさを見出せるかを考察することを目的とする。

その目的を達成するために、以下の課題を設定する。

課題 1: 複雑な敷き詰め模様のもととなる図形に気付くことができるか。

課題 2: 敷き詰めるという「数学的活動(算数的活動)」を通して、そこに合同変換が隠されていることに気付くことができるか。

(2) 研究方法

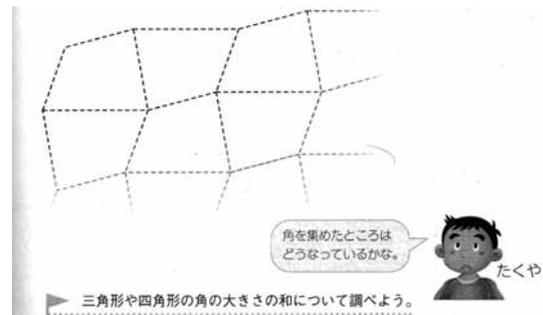
エッシャーの絵を元にオリジナルな教材を作成し、授業を行う。ビデオによる授業記録、事後アンケートを元に考察する。

3. 敷き詰めにおける変換に注目した教材化

本研究は、国立科学博物館で実施する。先の小川の論文から、数学への興味・関心を高める教材を取り上げることが重要である。また、参加者の年齢制限を設けないということで、発達や学習の段階に応じて、数学として有意義に学習活動に取り組める教材が求められる。そして、学校とは違い、学年ごとに学ばせる内容を決めるのではなく、各々のレベルで学ぶ内容が異なってくる。その各々のレベルで楽しめるような教材開発を行った。

桜井(1995)は、「これまでの教職経験から敷き詰めは、興味をひく(美しい、面白い、実生活とのつながりを持つ)、直感的に図形の性質をみてとれる、手作業を伴った試行錯誤がさせやすい」としている。ただし、今回の活動では敷き詰めではなく、「パズル」という言葉を使った。それは、参加者が低年齢であることが予想され、より興味を持ちやすい表題にするためである。また、敷き詰められた図形として、日頃目にしている壁などの模様ではなく、エッシャーの絵を用いた。これも上と同様、エッシャーの絵の持つ不思議を探ることは興味・関心をひくと考えるからである。

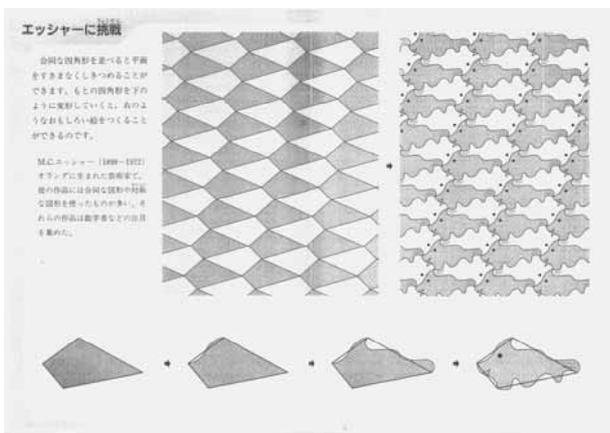
現行の小学校の教育課程で敷き詰めを扱うのは、小学校 3、4、5 年である。「小学校学習指導要領解説算数編(1999)」によると、第 3 学年の図形において、「正方形や長方形が身の回りで多く使われていることに着目したり、それらを敷き詰める活動を通して、平面の広がりや、一定の決まりに従って形を並べることによってできあがる模様の美しさについて感じられるようにする配慮が大切である。」となっている。また、第 4 学年の図形においては、「形も大きさも等しい二等辺三角形や正三角形を敷き詰める活動を通して、それらで平面を敷き詰めることができることに気付いたり、敷き詰めた図形の中に四角形や六角形を認めたり、図形の美しさを感じたりするなど、図形についての見方や感覚を豊かにしていく。」となっている。また、小学校 5 年では、平行四辺形、台形、ひし形に対して同様のことが述べられている。このように、敷き詰めを通して、低学年では模様の美しさ、中高学年では図形の性質を学ぶものとされている。実際、小学算数(教育出版)では、4 年上に三角形を敷き詰めた模様を作る活動が、5 年下に三角形や四角形の角の大きさの和を調べる導入として敷き詰めが用いられている。(資料 1)また、浜野(1996)は内角の和を敷き詰めによって考察する授業の提案を、曾我(2005)は色紙を使って色々な形を作る活動によって平面図形の理解を深める授業の提案をしている。



資料 1 小学算数 5 年上

上で現在の敷き詰めの扱われ方について見てきたが、敷き詰めが教材として現れたのはもっと以前のことである。桜井(1995)によると、中学校教科書では明治 40 年に、高等女学校教科書では明治 36 年に初めて敷き詰めが登場したとしている。明治から戦前期までの幾何教科書を調べた結果、正多角形の内角について考察させるものももっとも古くから存在し、次いで、模様を模写させたり新たに考案させたりする内容となっている。移動を考えさせるものは、昭和 7 年に初めて見られるとしている。

また、エッシャーの作品を用いた敷き詰めの教材は、「21 世紀への学校数学の創造 - 米



資料 2 中学数学 2

国 - 米国 NCTM による『学校数学におけるカリキュラムと評価のスタンダード』」で提案されているなど決して珍しくない。実際、エッシャーを教科書に載せているところもある。例えば、中学数学 2(教育出版)では、巻末に「エッシャーに挑戦」として扱っている。しかし、上の文献において、変換を大々的に扱っているものではなく、変形の仕方が書かれており、そのように変形すると複雑な敷き詰め図形ができるというものである。

現行の教育課程において、図形の変換を扱っているのは、中学校 3 年の相似変換だけである。以前は、中学校 1 年で平行移動、回転移動、対称移動といった合同変換が扱われて

いたが、改訂の際に削除された。しかし、高等学校数学の二次関数において、グラフの平行移動を行う。「高等学校学習指導要領解説数学編(1999)」によれば、「中学校では、図形の「平行移動」という用語や直線 $x = h$ については扱っていないので、指導に当たってはこのことに配慮する必要がある。」としている。また、「小学校学習指導要領解説算数編(1999)」、第2学年の図形において、「形を構成したり、分解したりする活動の中で、言葉で表現したりまとめたりする必要はないが、ずらしたり、回したり、裏返したりするなどの移動の操作を豊富に体験させることは、図形についての感覚を豊かにする上で大切である。」としている。

以上より、今回の活動では、敷き詰めを通して、教科書で扱われているような、図形の基本的性質に気付くことを直接の目的とはしない。試行錯誤しながら敷き詰めることを通し、数学への興味・関心を高めること、「数学的活動(算数的活動)」をすることに楽しさを見出すことを目的とし、教材開発を行った。よって、角度については触れず、敷き詰めの規則に気付くような展開にした。このことは、その規則が数学的に発展的な内容を含むものであったため、参加者の理解のレベルによって幅広い展開につながるためである。また、各自で敷き詰め図形を作る場面において、図形を切り取って準備した。これは、材料は同じであるのに、貼り方によって様々な模様ができることで、図形の感覚を豊かにし、数学への興味・関心を高めるためである。

上で述べたとおり、本研究は敷き詰めの規則、つまり敷き詰めに合同変換が関係していることを気付くように展開をした。よって、例えば参加者から「ずらす」「横に(動かす)」「上に(動かす)」といった言葉や活動が見られれば、それは平行移動の学習につながると思われる。また、「まわす」「くるっ」といった言葉や型紙を回す姿が見られれば、それは回転移動の学習につながると思われる。本研究で指導者から説明はしないが、型紙を裏返して敷き詰める参加者が見られたら、それは線対称、更には鏡映を学習するきっかけになると思われる。そして、その変換によって平面を敷き詰めていくことで平面の広がりを感じたり、逆に平面はそのような変換によって敷き詰められることを知ったりすることができると思われる。

以下は、本活動と学校での学習との関連についての表である。

表1 本活動と学校での学習内容との関連について

学年		本活動と関係している学習内容	学習内容につながる本活動
小学校	1年	長さの比較、形の特徴、方向や位置	敷き詰めようと辺を合わせることで長さを比較する、移動の仕方を考える
	2年	形の構成と分析、三角形や四角形を知る	型紙を使って敷き詰める、移動の仕方を考える、四角形(正方形)が敷き詰められている壁を探す
	3年	基本的な図形の構成要素を知る	型紙を使って敷き詰める、四角形(正方形)が敷き詰められている壁を探す
	4年	基本的な図形についての理解を深める	二等辺三角形や正三角形の敷き詰めを通して、それぞれの図形における特徴を知る

	5年	面積、平行、垂直、図形の性質	敷き詰められている図形はすべて同じ面積であることを確認する、正方形を敷き詰めて辺を延長することで平行・垂直を学ぶ、平行四辺形や台形など新たな図形を敷き詰められるか考える
	6年	概形とおよその面積	複雑な敷き詰め図形において、すべての面積が同じことを確認する
中学校	1年	線対称、点対称、空間図形の構成、	敷き詰める方法として鏡映や回転移動を行うことで、線対称、点対称についての理解が深まる、平行移動や回転移動によって空間図形を作れることを理解する
	2年	平行線や角の性質、多角形の角、三角形の合同条件	敷き詰め模様を観察することで平行線と角の関係に気付く、多角形を三角形に分解し内角を求める、敷き詰め図形はすべて合同であることを確認する
	3年	三平方の定理の応用	未知の値を求めるため、図形を有効に分解することができる
高等学校	数学基礎	身近な事象の数理的考察	壁や天井、芸術作品を数理的に考察することができる
	数学	二次関数とグラフ	平行移動の理解を深めることができる
	数学A	平面図形	三角形の性質についての理解を深める
	数学B	ベクトル	ベクトルによって移動の理解を深める
	数学C	行列	移動を代数的に取り扱う
大学		代数	変換群との関係を理解する

4. 敷き詰めにおける変換に注目した数学的解説

(1) もととなる図形について

エッシャーのような複雑な敷き詰め図形は、シンプルな多角形をもとに作られている。以下、敷き詰めることのできる多角形について考察する。

まず、平面を敷き詰めることのできる正多角形は、正三角形、正方形、正六角形の3種類に限られている。また、正多角形でない図形に関しては、以下のように証明されている。(深谷賢治著(1996), 双曲幾何, 岩波書店, pp122-124)

次の2つは、自然数 $k \geq 3$ において同値である。ただし、敷き詰められている図形をタイルと呼ぶ。

() 平面の凸な k 角形からなる敷き詰めが存在する。

() $k \leq 6$

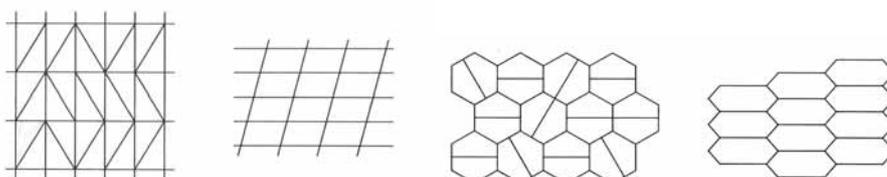


図 1

また、凸五角形において、平面を敷き詰められる図形は 14 種類発見されている。最後に発見されたのは 1985 年である。しかし、これら以外にないかどうかは知られていない。凸六角形においては、敷き詰めることができるのは 3 種類のみ存在することが証明されている。(図 2)

(2)合同変換について

今回の授業で扱った移動・変換は、以下の 2 つである。

() 並進 (図 3)

図形を、ある方向に決まった長さだけずらす変換。

例えば、ベクトル a における並進は、

$$\tau_a : x \mapsto x + a \text{ と表す。}$$

() 回転 (図 4)

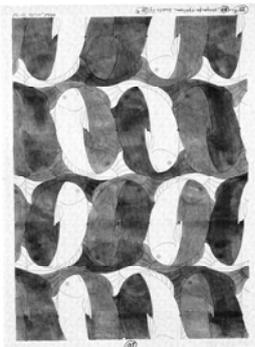


図 4 回転の敷き詰め

図形を、1つの点を中心として、決まった角度だけまわす変換。

原点 O のまわりの角の θ 回転は、

$$R_\theta : x \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} x \text{ と表す。}$$

これらは、変換の前後で図形の形・大きさを変えない変換である。このような距離を保つ変換を、合同変換という。

また、その他の合同変換として、次がある。

() 鏡映 (図 5)

図形を、1つの直線を折り目として折り返す変換。

方程式 $ax + by + c = 0$ によって与えられる直線 l があるとき、 l に関する鏡映は、

$$\sigma_l(x) := \begin{cases} x & (x \in l \text{ のとき}) \\ x' & (x \notin l \text{ のとき、} l \text{ は } x, x' \text{ を結ぶ線分の垂直二等分線}) \end{cases}$$

図 5 鏡映について



上で挙げた 3 つの変換は、エッシャーも用いていた変換であるが、この他にもう一つ挙げている。それが、すべり鏡映である。

() すべり鏡映 (図 6)

並進と鏡映の合成。

直線 l とそれに平行なベクトル c があるとき、

l を軸とするすべり鏡映は、 $\tau_c \sigma_l = \sigma_l \tau_c$

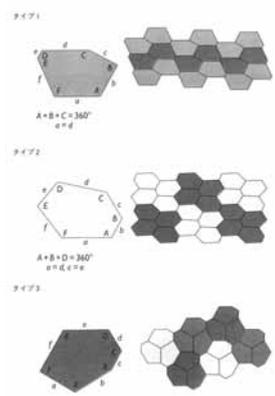


図 2 敷き詰め可能な凸六角形

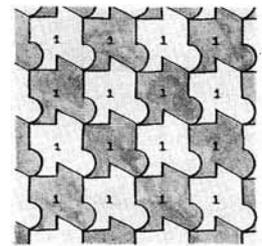


図 3 並進の敷き詰め

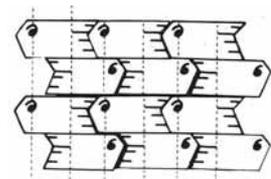


図 6 すべり鏡映の敷き詰め

(3) 敷き詰め模様と合同変換について

上で解説したように、合同変換は並進、回転、鏡映、すべり鏡映の4つである。また、本研究では、正方形をもととする敷き詰めを行った。以上を受けて、以下では、正方形の敷き詰めと4つの各合同変換との関係について解説する。

正方形の敷き詰めは、図7のように考えられる。

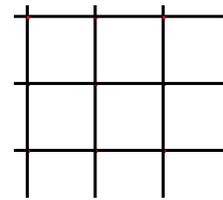


図7 正方形の敷き詰め

() 並進との関係

横と縦とに関する並進によって、正方形が敷き詰められていると考えられる。

そのように考えることにより、その変換に対応する辺に同じ変換による変形を行うことで敷き詰め模様を作れる。(図3参照)

() 回転との関係

回転による正方形の敷き詰めは、2つのパターンに分けられる。1つは、頂点に回転の中心を持つ場合であり、もう1つは辺上に回転の中心を持つ場合である。

並進の場合と同様に考えることで敷き詰め模様を作れる。例えば、図8は、正方形の頂点に回転の中心を持つ回転と考え、敷き詰め模様を作っている。図中の頂点にある、 $\frac{1}{4}$ と $\frac{1}{2}$ は()の解説と同様に、それぞれ $\frac{1}{4}$ 回転、 $\frac{1}{2}$ 回転の中心を表している。

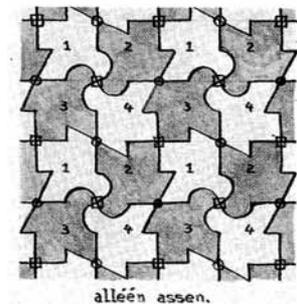


図8 回転移動での敷き詰め

() 鏡映との関係

鏡映による正方形の敷き詰めは、2つのパターンに分けられる。1つは、辺に関する鏡映であり、もう1つは、例えば、図9における黒い正方形に対する斜めの実線に関する鏡映である。

上の場合と同様にして考えると、敷き詰め模様を作れる。

() すべり鏡映との関係

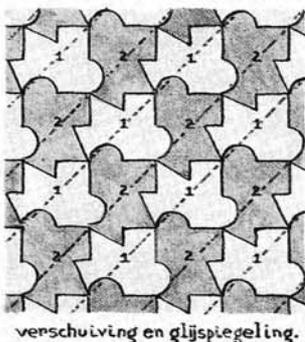


図10 すべり鏡映での敷き詰め

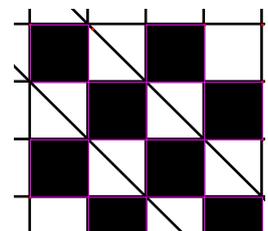


図9 鏡映の説明

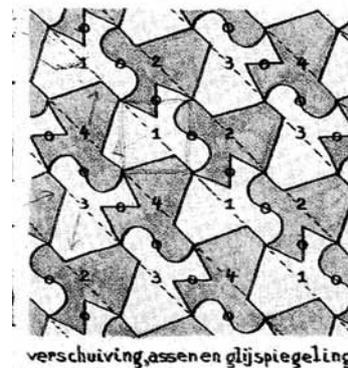
すべり鏡映によって正方形が敷き詰められていると考えられる。

上の場合と同様にして考えると、敷き詰め模様を作れる。例えば、図10中の図形1と2は、すべり鏡映の関係となっている。図形1は、点線に沿って並進し、点線と点線との中間の線に関する鏡映を行うと、図形2に重なる。

以上のように、どの変換を用いて敷き詰めを行ったかを考えることによって、複雑な敷き詰め模様の作り方が変わってくる。

また、上の変換の合成によって敷き詰めを考え、それによって敷き詰め模様を作ることができる。例えば、図11は、並進、回転、すべり鏡映の

合成によるものである。図 11 中の図形 1 は、並進によって隣接する図形 1 に、点を中心とした 1/2 回転によって隣接した図形 2 に、点線にそったすべり鏡映は隣接した図形 4 に、更に、点線に直角な方向へ動くすべり鏡映によって隣接したモチーフ 3 にそれぞれ重なる。



(4) 発展的内容について

いま、空間（本授業では平面） E から E への合同変換全体を G とする。この集合 G において、その G の元 f, g の積を写像の合成によって定義すると、この集合 G は群になる。以下、証明である。

() 結合律について

$\forall f, g, h \in G, \forall x \in E$ において、 $h(x) = y, g(y) = z, f(z) = u$ とおく。

このとき、 $((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = (f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(z) = u$

$(f \circ (g \circ h))(x) = f(g(h(x))) = f(g(y)) = f(z) = u$ よって、結合律が成り立つ

() 単位元 id_E の存在

id_E を $x \mapsto x$ と定める。 $f, id_E \in G$ において、

$f \circ id_E = id_E \circ f = f$ よって、単位元が存在する。

() 逆元の存在

合同変換は全単射であるから、逆変換が存在する。

$\forall f \in G$ に対して、 $f \circ g = g \circ f = id_E$ ($g \in G$)

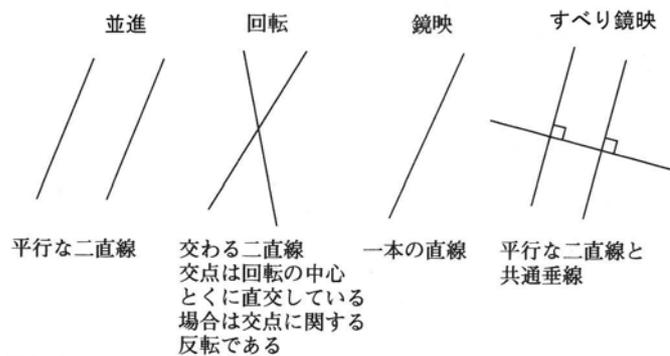
よって、 $g \in G$ を f^{-1} とすると、逆元が存在する。

以上より、集合 G は群となり、それを合同変換群という。

ここで、平面の任意の合同変換は、高々 3 つの鏡映の積であることが証明されており、そのことから、以下が言える。

合同変換群 G は偶数個の鏡映の積である偶変換の全体 G_+ と奇数個の鏡映の積である奇変換の全体 G_- とから成る。すなわち、 $G = G_+ \cup G_-$, $G_+ \cap G_- = \emptyset$ である。 G_+ は、恒等変換、並進、回転から成り、 G_- は鏡映と 3 個の鏡映の積で鏡映でないものから成る。

この 3 個の鏡映の積で鏡映でないものがすべり鏡映であることが証明されている。また、恒等変換以外の 4 つの変換については、直線の配置から特徴づけられる。



5. 敷き詰めにおける変換に注目した教具の解説

(1) エッシャーの鳥の絵を敷き詰めのもととなる図形(正方形)に直す場面において

観察眼の優れた参加者や図形の感覚が豊かな参加者がよく見ると、なにかシンプルな多角形が見えるような敷き詰め模様ではなく、本研究では、エッシャーの絵の持つ不思議を探ることは興味・関心をひくと考えられることから、エッシャーの絵をシンプルな多角形にすることにした。また、変換に注目することを重視する立場から、移動した感覚を前面に押し出せるようにした。

まず、2羽の鳥とその周りの9つの長方形に注目することにした。そこで、棒を4本準備し、中心の正方形に関係のない辺に色をつけた。そして、正方形からはみだしている部分をそれぞれ貼った。ただ、この絵の場合は、3辺を平行移動する必要がある。そこで、初めに動かす辺は、参加者が見て分かりやすく、インパクトのある辺にした。ただ、2番目、3番目に動かす辺が平行移動する分のみ動くようにしなければ変換に注目できないと考え、先に移動する2辺に高さを出し、後から移動する2辺は黒板に直接貼れるようにした。

(2) 移動について

予備調査から、平行移動、回転移動を理解できない参加者が見られた。これは、参加者が低年齢であり、移動における感覚がまだ未発達であるためと考えられる。よって、本研究では、移動の仕方を矢印で表した。それにより、移動の名称は知らなくとも、矢印で移動の仕方を区別できるものとなった。平行移動、回転移動の矢印はそれぞれ以下の写真のとおりである。



写真1 正方形



写真2 正方形から三角形を切り抜く



写真3 切り抜いた三角形を平行に移動し、矢印で表す



写真4 回転移動の矢印

(3) 敷き詰める図形を自由に作る場面において

予備調査から、正方形からの敷き詰め図形を自由に作らせることは、時間の関係上困難であることが分かった。これを受けて、本研究では、平行移動、回転移動の説明の際使用したものを参加者に与え、敷き詰め図形を作る始まりの状態を一緒にした。これは、時間の問題を解決するだけでなく、同じパーツでも貼り方が異なると違った敷き詰め模様ができることを学べるものとなった。(写真2参照)

6. 敷き詰めにおける変換に注目した活動概要

(1) 活動環境

日時：平成 17 年 11 月 19 日 30 分を 2 回

対象：国立科学博物館来館者

1 回目：幼稚園児 1 名(A)、小学校 1 年 1 名(B)、小学校 2 年 1 名(C)、
小学校 5 年 1 名(D)、

2 回目：小学校 2 年 3 名(E、F、G)、小学校 4 年 1 名(H)

以下、括弧内のアルファベットで表す。

準備：コンパス、定規、はさみ、セロハンテープ、ボールペン、
敷き詰める図形の型紙×3 枚、台紙、説明プリント

(2) 活動展開



図 12 エッシャー
の絵

目標：敷き詰めに興味を持ち、規則的に敷き詰められていることに気づく。

局面 1：エッシャーの作品を用いて、敷き詰めのもととなる図形について知る。

鳥がきれいに敷き詰められているエッシャーの絵(図 12)を提示し、敷き詰めに興味を持たせた。この時、鳥の形をしたピンク色の透けるシートを白、黒の鳥にそれぞれ重ね、同じ大きさであることを確認した。

次に、上の絵において、鳥がどのような図形をもとに描かれたの
かを見た。正方形の描かれたシートを絵の上に重ね、1 つの正方形
の中に鳥の体のどの部分があるかに注目させた。その後で、2 羽だけを拡大して取り上げ、
先の正方形からはみ出た部分を切り離し移動し、正方形になることを示した。(写真 6)以下は、
その時の対話である。

【対話 1】

指導者：黒い鳥の足を上に動かしていくと...

A(幼稚園児)：あっ。

B(小 1)、C(小 2)：(びっくりした様子で微笑む。)

H(小 4)：はまるんだ。

【対話 2】

指導者：しっぽはどう動かせばいい?

D(小 5)：(指で移動を表そうとする) (写真 5)

A(幼稚園児)：あっ、分かった。反対側に動かす。

(指を左から右へ動かす。)

G(小 2)：あっ。それを反対の方向にやる。

指導者：動かしてみるよ。

A(幼稚園児)：くくくっ。(嬉しそうな顔をしてお母さんの
方を見る。)

B(小 1)、C(小 2)：(うわぁというような顔をする。)



写真 5 指で移動を表す様子



写真 6 鳥を正方形に
戻している様子

D(小5)：(嬉しそうにして手で口をおさえる。)

H(小4)：おっおっ。

対話1では、はまることに驚いているだけである。しかし、対話2では、はまったことへの驚きではなく、はまったことで鳥が四角形になったことへの驚きとして見て取れる。

局面2：移動について

局面1を受けて、正方形を準備した(赤)。その1辺から三角形を切り取り、平行移動し、対応する辺に貼った。この時、移動の仕方を強調するために、準備した2種類の矢印(まっすぐなもの、まるいもの)から選ばせ、先にできた図形の上に貼った。(写真8)つまり、矢印は敷き詰め方の移動の仕方を表したものである(平行移動、回転移動)。今、できた図形はどうすれば敷き詰められるかを問い、参加者が前で発表した(C、G)。色違いの同じ図形を準備し(ピンク)、敷き詰めてもらったものの1枚に重ね、どう動かせば赤の図形に重なるかを問い、確認し、矢印(まっすぐなもの)を貼った。以下、その対話である。

【対話3】(写真7)

指導者：今、これ、同じように作ったピンクの図形、ね。これを、この、となりの赤いのに重ねるには、どういう風に動かせばいい？

...上に動かしたらー、重なる？

参加者：(首を横に振る。)

指導者：重ならないよね。どう動かせばいいかな？

C(小2)：よこにずらす。

指導者：こうかな？

C(小2)：(うん、とうなづく。)

指導者：これ、今、横にずらしたよね。だから、さっきと同じ矢印(まっすぐなもの)でいいかな？

参加者：(うなづく。)

指導者：じゃあ、次。今度このピンクのから、またこの隣の赤いのに。どうすればいい？

A(幼稚園児)：あれがもっとあっちにいく。(と言いながら、指を右から左に動かす。)

指導者：同じように横にずらせばいいよね。



写真7 敷き詰め方を問いかける



写真8 矢印で移動を表す



写真9 前で発表する様子

この後、図形を作った時の矢印(まっすぐなもの)と敷き詰める時の矢印(まっすぐなもの)が同じであることを確認した。

次に、上の場合と同じように三角形を切り取り、頂点を中心として90°回転し、対応する辺に貼った。この時も、上と同様の方法で矢印(まるいもの)を選び、貼った。ここで、できた図形はどうすれば敷き詰められるかを問いかけた。その際、参加者にはできた図形を準備し、その型を取るようにして、各自敷き詰めた。その後、前で発表し(D、F、写真9)、

上と同様に、参加者に確認しながら矢印(まるいもの)を貼った。

局面 3：敷き詰め図形を作る

予備調査の反省から、参加者には、局面 2 で用いた正方形から三角形を切り取った状態のものを準備した。そして、局面 2 での 2 つのパターンとは異なる貼り方をし、できた図形はどうすれば敷き詰められるかを問いかけた。活動後、参加者の作ったものを発表した。

最後に、以下の 2 点を課題として挙げ終了した。自分の身の回りの敷き詰めを探すこと、正方形以外に知っている図形があるかを問い、その図形でも複雑な敷き詰められる図形を作ることができるか挑戦すること、である。

7. 考察

(1) 課題 1 に対する考察

課題 1：複雑な敷き詰め模様のもととなる図形に気付くことができるか。

対話 1 と対話 2 に注目して考察する。対話 1 では、一羽一羽の鳥がどのような図形からできたのか見当もつかず、ただ指導者が上に移動する様子を見て、きれいにはまることに驚いているだけである。しかし、対話 2 では、しっぽがはまる場所を見つけることができていた参加者が見られる。また、はまる場所は見つけることができなかったが、はまったことで鳥が正方形になったことに気付き驚いている様子が見て取れる。

また、局面 2 の導入の場面で、以下のような対話があった。

【対話 4】

指導者：じゃあ、四角形準備します。さっき言ったよね？

C(小2)：(うん、とうなづく。)

D(小5)：(うんうん、とうなづく。)

このように、C(小2) D(小5)はなぜ四角形を準備するのか分かっていると考えられる。つまり、複雑な敷き詰め図形を作る際に、もととなる図形は(今回の活動においては)敷き詰めることのできる四角形であると分かっていると捉えることができる。

(2) 課題 2 に対する考察

課題 2：敷き詰めるという「数学的活動(算数的活動)」を通して、そこに合同変換が隠されていることに気付くことができるか。

考察をするにあたって、G(小2)とH(小4)の活動に注目する。

G(小2)の活動

局面 2 での回転移動の敷き詰めをする場面において

【対話 5】

サポーター：どうやったの？

G：えっとねー、こういう風に回ってる。

サポーター：回ってるんだー。そっか、そっか。



写真 10 1 点を押さえ回転させる様子

すごいなー。

G：他にもできそうだよ。

サポーター：おっ、やってみな。

G：(先のやり方とは異なりきれいに敷き詰められるような方法を図形を回転させながら考える。)

サポーター：これ、違うやり方できそう？

G：... (2枚描いたところで考えている。自分が描いたものの回転の中心が、授業者が提示した回転の中心とは違うことに何回も1点を押さえ、回転させることで気付いたようである。)

(写真 10)

局面3の各自敷き詰め図形を作る場面において

【対話6】

サポーター：(1つに型紙を重ね、隣を指差し) どうやって移動するとこれになる？

G：(回す。)

サポーター：そう、まわすよな。

G：くるー。くるー。(と言って、ある1点を回して重ならず、また違う点を抑えて回す。)(写真 11)

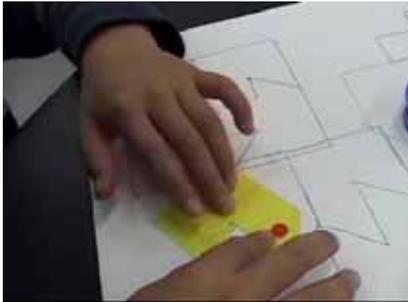


写真 11 回転の中心を見つける

中心を確認後

サポーター：(切り取られた部分を指して) ここにあったのをどうやって回すとここに付く？

G：(さっき確認した中心を押さえながら)

ここ中心にこう。(写真 12)

もっと違うのもできるよ。



写真 12 中心が同じことを確認

この参加者は、学年を考えると回転の中心という概念を知らないと考えられる。しかし、この活動を通して回転する時の動かない点(中心)を自然と意識していることが見て取れる。また、自分の行ったやり方以外に敷き詰める方法はないのか、自分が作った形以外に敷き詰められる形はないのか、と自ら課題を見つけ取り組む様子が伺える。

H(小5)の活動

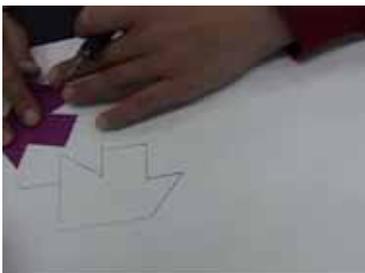


写真 13 回転させ敷き詰められる所を探す

局面2での回転移動の敷き詰めをする場面において

2枚描いたところで止まっている。サポーターにどうやって描いたのか聞かれ、回して重ねる。次に描くのを同様に回してみるのが、納得がいかない様子。(写真 13)その後、1枚描いてみるが「これできない。」と言って、新たに描き始める。回転の中心があっているものを2枚描いた後、始めの所に型紙を置き、回して先に書いたところに重ねることを確認する。そして、同じように回転させて3枚目の敷き詰められる場所を見つける。(写真 14)

この参加者も、回転の中心という概念を知らないと考えられる。しかし、平行移動の例を受け、矢印が同じなのでないかと考え、回転することを意識して敷き詰めようとしていることが見て取れる。その際、やはり自然と中心を意識している。また、自分の方法ではできないと判断し、その後ですぐに正しい敷き詰めをしていることから、前の段階での試行錯誤の中で規則を見出したと考えられる。



写真 14 正しい敷き詰めをする様子

上のように、学年は小学校低学年と高学年と異なっていますが、数学的活動（算数的活動）を通して、敷き詰め規則に気づき、敷き詰め図形を作ること、それを敷き詰めることに積極的な様子が見て取れる。

また、以下は事後アンケートからの抜粋である。

質問「今日の活動で一番驚いたことは何ですか。」に対して

ふくぎつな形が重なっていくとピッタリはまること。（A幼稚園児）

いろんな形でもむきをかえてたりしながらやってもちゃんとハマるのでびっくりしました。

（C小2）

一の図形でいろいろなかたちができる事（D小5）

とりをうごかしてしかくになったのがおどろいた。（B小1）

ばらばらなパズルの四かくになったから（F小2）

とりがパズルでしかくになったのがおどろいた。（G小2）

形がへんでもならびかえれば正方形になる。（H小4）

感想

いろんなどうぶつなどでパズルを、出きたりするかなあと思いました。（C小2）

パズルってこんなに楽しいとった（G小2）

さんすうのべんきょうでパズルは学校ではやらないのでべんきょうになりました。（H小4）

上の質問に対して、一人を除いて回答していた。30分という短い時間の中で驚いたことがあったことは、参加者の数学への興味・関心に対して良い刺激になったと考えられる。

また、～より、今回の活動を通して、これまで知らなかった図形の性質を知ることができ、「数学的活動(算数的活動)の楽しさ」に気付いたと読み取れる。実際、局面3の場面では、皆、今回の授業では説明しなかったすべり鏡映を用いた図形を作り、試行錯誤しながらも敷き詰めていた。(写真15、16)また、共有する場面では、裏返すという操作が入ることになついていた。また、



写真 15 すべり鏡映で敷き詰める様子

においては、これまでのパズルを組み立てる立場からピースを作る立場へと視点が変わっ



写真 16 敷き詰め図形を作る様子

ており、興味を持っている様子が伺える。 においては、パズルの中に数学があることを理解し、パズルの見方が変わっている。

以上より、課題 2 は達成されたと言える。

8. おわりに

本研究では、日常の事象を取り扱うことで、数学を身近なものとして捉え、数学への興味・関心を高め、「数学的活動(算数的活動)」をすることに楽しさを見出せるかを考察した。その結果、敷き詰め図形にある規則を学ぶ活動によって、参加者は日常生活の中に数学があることに気付き、その規則に触れることによって、「数学的活動(算数的活動)」をすることに楽しさを見出したことが確認された。

しかし、日常の事象を取り扱う教材開発はまだまだ可能である。今後は、数学を身近なものとして捉えるためには、どのような授業が効果的なのか、考えていきたい。

謝辞

今回の研究に際して、国立科学博物館の小川義和先生、亀井修先生をはじめとする諸先生方、ボランティアの方々には、多大なるご協力と共に、大変貴重なご助言・ご指導をいただきました。厚く御礼申し上げます。

注) 本研究は、日本学術振興会科学研究費基盤研究 B(2)課題番号 17300243「科学博物館等における数学展示・実験教具とその実践手法の開発研究」(研究代表者磯田正美)による研究の一環として行われた。

参考・引用文献

- 国立教育政策研究所教育課程研究センター(2003). 平成 13 年度小中学校教育課程実施状況調査報告書: 中学校数学. 実教出版
- 国立教育政策研究所教育課程研究センター(2004). 平成 14 年度高等学校教育課程実施状況調査報告書: 高等学校数学 数学. ぎょうせい
- 文部省(1999). 小学校学習指導要領解説: 算数編. 東洋館出版社
- 文部省(1999). 中学校学習指導要領解説: 数学編. 文部科学省
- 文部省(1999). 高等学校学習指導要領解説: 数学編, 理数編. 実教出版
- 小川義和(2003). 学校と科学系博物館をつなぐ学習活動の現状と課題. 科学教育研究. pp24-32
- 小川義和, 下條隆嗣(2003). 科学系博物館の単発的な学習活動の特性: 国立科学博物館の学校団体利用を事例として. 科学教育研究. pp.42-49
- 桜井恵子(1995). 戦前の中等教育教科書にみる敷き詰め利用. 第 28 回数学教育論文発表会論文集
- 澤田利夫(2005). 小学算数 5 下. 教育出版
- 浜野雅輝(1996). 四角形をウラにしてしきつめようとすると?. 明治図書出版. pp90-95
- 曾我泉(2005). 形作り: 形の合成・分解. 新しい算数研究 9. pp52-54

- 能田伸彦(1997). *21世紀への学校数学の創造: 米国: 米国NCTMによる「学校数学におけるカリキュラムと評価のスタンダード*. 筑波出版会
- 澤田利夫(2002). *中学数学2*. 教育出版
- ドリス・シャットシュナイダー(1991). *エッシャー・変容の芸術 シンメトリーの発見*. 梶川泰司. 日経サイエンス社.
- 坂根巖夫(1995). *M.C.エッシャー その生涯と全作品集*. メルヘン社
- キース・デブリン(1995). *数学:パターンの科学: 宇宙・生命・心の秩序の探求*. 日経サイエンス社
- 深谷賢治(1996). *双曲幾何*. 岩波書店
- 澤田利夫(1999). *中学数学1*. 教育出版
- 高橋礼司(1998). *対称性の数学*. 放送大学教育振興会