礒田正美, “「数の分割」における数学化～課題学習における公理的見方考え方の指導～”, 日本数学教育学会誌, 臨時増刊, 総会特集号, vol.71, 1989 ,日本数学教育学会

参考文献
1）古藤怜, “課題学習について”, 数学教育研究, no.4, 1989, 上越教育大学数学教室
2）礒田正美, “数学化の立場からの創造的な学習過程の構成（Ⅰ）～（Ⅵ）”, 筑波数学教育研究, vol.3-7, 8-B
3）岩波数学入門シリーズ, “順列組み合わせと確率”
4）杉山義重, “公理的方法に基づく算数・数学の学習指導”, 東洋館
5）沢田・竹内, “問題から問題へ”, 東洋館

「数の分割」における数学化

～課題学習における公理的見方考え方の指導～

北海道教育大学岩見沢分校　礒田正美

1．研究意図

新指導要領において、新たに課題学習が取り入れられることが決まっている。指導資料ではその指針が示されているものの、課題学習とは何か、どのような教材が適切か、またいかにすべきかというような点、特にその実践面についてはこれから検討されるべき問題である。しかし、その導入意図として、数学の学習指導の中でこどもの創造的な活動を実現しようとする点があることは、共通見解として強調すべき点と言えよう[1]。

筆者は、同じ意図のもと、これまで数学化の立場からの創造的な学習過程の実現をめざして研究を深めてきた[2]。これまでの研究では「数学を創造する際に典型となる活動は何か」という点について成果を得ている。本研究は、この成果を実践的に活用したもので、一つの課題を生徒が数学的に発展していく授業実践を振返ることにより、数学化の過程の特徴や、数学化が進展していく契機や原動力、数学化の前後での生徒の思考の変容等について、実践の立場から明らかにすることを主題としている。そして、今後の課題学習についての考察や議論を深める上で基本となる「生徒が数学を創り出す活動を促す」という視点からの授業実践に際しての示唆を得ることをめざす。

事例として取り上げるのは分割数(number of partitions)である[3]。後で示すように、この事例は、一般の中学生には難解と考えられるが、筆者の勤務していた筑波大学附属駒場中学校の生徒には手ごたえのある事例であった。この事例を取り上げたのは、この事例が非常に明瞭に数学的活動の階層を示しているからであり、同時に公理的な考え方を明瞭に含むからである。上記で述べたように、本研究の意図は、課題学習の扱いの視点としての数学化に関する考察をすることにあるが、同時に、駒場における学習可能性を示すものである。

以下では２で数学化と公理的な考え方の枠組みを示し、３では授業実践とその評価を行ない、４では２の枠組みから３の実践過程を分析する。５では、findingについて述べる。

2．数学化と公理的な考え方

杉山吉茂は公理的な考え方(公理的方法；杉山)を「根拠(公理)を探ること，根拠を基に考えること（仮説((公理))をおいて考える）」の２つにおいている[4]。ここでは、あとの実践に認められる生徒の活動を分析する為の枠組みとして、筆者のこれまでの研究における数学化と杉山による公理的な考え方を示し、総合する。なお、枠組みを説明する事例として分割数を取り上げる。ただし、後に示す実践例における工夫を明瞭にする意味で、筆者がこれまでの先行研究で論じた形式で扱うものとする。

２－１．事例(Erich Wittmanによる研究[5]を参考)

課題は「自然数ｎを自然数の和に分解する場合の数は何通りあるか」という分割数についてである。ただし、ｎ自身も１通りと数え、分割した際の大小順序は考慮しない。

定式化した形で述べれば、

P_k^n を、自然数ｎをｋ個の数の和で表すときの組合せの数とする。
このとき $P_k^n = P_{n-k}^n + P_{k-1}^{n-1}$ ($k \geqq 1$，$k \leqq n$)である。これを導く過程をおおまかに示す。

はじめに「自然数ｎを自然数の和に分解する場合の数は何通りあるか」という課題に取り組む。ただし、ｎ自身も１通りと数え、分割した際の大小順序は考慮しない。例えば、次の書き出しのように４を分割するとき、４を一個に分割したときは４のみの１通り、二個に分割したとき３＋１，２＋２の２通り，・・・・という数え上げから、４の分割は５通り、すなわち分割数は５であることがわかる。試行錯誤的な作業ではｎが大きくなったとき不可能になる。実際、ｎ＝１０の時で４２通りあるが、数え残しやだぶりがでて、なかなか答が一致しない。そこで、容易な方法はないか探る。

４＝４
　＝３＋１
　＝２＋２
　＝２＋１＋１
　＝１＋１＋１＋１

何か決りを見つけようとｎ＝１から順に調べていくことになる。いろいろな手立てが浮び試行錯誤を繰返す。書き出していくうち、最も容易な方法としてそれまでに書き出した数の場合を利用して、それ以後の数の分割をするという手立てがないかを探る。

順に書き出していくと以下のようなことに気付く。

１＝１

２＝２
　＝１＋１

３＝３
　＝２＋１
　＝１＋１＋１

４＝４
　＝３＋１
　＝２＋２
　＝２＋１＋１
　＝１＋１＋１＋１

５＝５
　＝４＋１
　＝３＋２
　＝３＋１＋１
　＝２＋２＋１
　＝２＋１＋１＋１
　＝１＋１＋１＋１＋１

６＝
　・・・・

７＝７
　＝６＋１
　＝５＋２
　＝４＋３
　＝　・・・

８＝　・・・
　・・・
　＝６＋１＋１
　＝５＋２＋１
　＝４＋３＋１
　＝４＋２＋２

$\rightarrow = 3 + 3 + 2$

上図の矢印の対応関係に気付くだろう。例えば８の３分割は５通りある。その５通りのうち、２通りは５の３分割の２通りを利用して書き出すことができ、３通りは７の２分割を利用して書き出すことができる。すなわち、$5 = 2 + 3$（$P^{8}_{3} = 5$，$P^{7}_{2} = 3$，$P^{5}_{3} = 2$）である。このような対応関係の意識から、この対応を手続きに使って書き出せないかということになる。そのためには、この手続きだけで書き出せることを説明する必要がある。そこで、この手続きの意味を考える。この手続きで上図を分析すると、手続きの意味として、次の２つの場合があることに気付く。すなわち、上図の実線部は「Ａ．＋１を付けたす」という操作で７の書き出しから８の場合の一部が書き出せることを示している。それ以外の場合として、点線部の「Ｂ．すべての項に１加える」の操作があることがわかる。そして、操作ＡがP^{n-1}_{k-1}に対応し、操作ＢがP^{n-k}_{k}に対応することを認め、$P^{n}_{k} = P^{n-1}_{k-1} + P^{n-k}_{k}$（$k \geq 1$，$k \leq n$）という公式を設定する。ここで問題なのは、この公式が正しいかどうかである。言換えれば、規則Ａと規則Ｂのみでほんとうにすべての場合が書き出せるかどうかである。その証明は、数学的帰納法による。証明の概略を述べる。$n \leq m$のとき、成立つと仮定する。$n = m + 1$では、P^{m+1}_{k}は$m + 1$をk個に分割した場合の数を意味する。それぞれの実際の書き出しの末項は、１かそれ以外である。末項が１のとき、操作Ａによって書き出せる。１加えているから、基になる書き出しはmの分割であり、項数が１増えている。、mを$k - 1$個に分けた場合の数と一致する。
すなわち、P^{m}_{k-1}通り。末項が１より大きいとき、操作Ｂによって書き出せる。項数が変らず、項数分だけ数が増加する対応だから、基になる書き出しは$m - k$のk分割である。すなわち、P^{m-k}_{k}通りである。これ以外にないから、与式は成立つ。

この証明以後、分割数は公式を利用して求めればよく、書き出す必要はなくなる。

２－２．擴田の数学化の枠組み

上記の例を、筆者の数学化の枠組みで述べる。
はじめに、数学化の過程について述べる。その過程は次の活動の層からなる。

＜数学化の過程の活動の層＞

Ⅰ．数学化の対象を創り出す、ある種の方法による活動；
　　数学化の対象となる現象を創り出す。
Ⅱ．Ⅰの活動を反省する活動；
　　現象を創り出した活動を、振返り、意識的な対象として分析する。そして、新たな方法を見出す。
Ⅲ．数学化の結果として反省から得た新たな方法による活動；
　　Ⅰの活動とは異質な新しい方法による活動が展開される。

注；右の活動の層は、３つの活動がその過程に含まれることを意味しており、その過程をこれら活動の層で順に分断する意図はなく、連続的な往来の意味も含んでいる。

上記の事例では、最初は試行錯誤的にすべて書き出す（活動Ⅰにあたる）。ここで試行錯誤的な方法とは、でたらめな書き出しだけでなく、樹系図的な手法も含んでいる。しかし、おちが出やすく、難しいことに気付き、$n = 1$の場合から順に書き出し（Ⅰ）、巧い方法はないか探る。ここですでに反省ははじまっている（Ⅱ）。すなわち、巧く書き出すために

⑤．根拠(方法)を積極的に利用しようとすること
⑥．根拠(方法)を比較して、より重要な根拠(方法)を見出すこと

3．授業実践と評価

ここでは、分割数についての授業過程とその評価を述べる。

3－1．実践概要

筆者は毎年新学期の授業始めに「数学とは何か」という話題で、授業をしている。この分割数を教材にした授業実践は、昨年度、筑波大学附属駒場中高等学校の中学1年生を対象に行なったものである。目標は「数学化の過程を生徒がすすめる中で、これから学ぶ数学について知ること」である。知ることの内容としては「数学における、根拠を探ること、根拠を基に考えること(すうなわち、公理的な考え方)を経験し、そのよさを知ること」であり、他には「数学が自分のやっていたことを『振返ってみて分析すること(反省)』により創り出せること」を経験させることである。

授業は、次の4時間からなる。授業時間内では、とても課題解決できないため、各時間ごとに宿題を出して、レポートにまとめさせ、考えてきたことを発表させる形式で授業を進めた。

第1時；課題の理解と解法の探求(1)、第1回レポート出題(全員)
第2時；解法の探求(2)、レポートの報告；第2回レポート出題(できたもの)
第3時；解法の探求(3)、レポートの報告；第3回レポート出題(できたもの)
第4時；構造の考察とまとめ；第4回レポート出題(知識の定着と練習を含む)

第4時以後は、これについての授業は行なわず、生徒から出てきたレポートをプリントして解説する形式で、この題材について、1学期を通して時々論じた。最後に、試験を行ない定着状況を調べた。

以下、実践の概要を述べる。

第1時

次の問を出題した。

> 問．自然数を自然数の和で表す。
> 表しかたは何通りあるだろうか？
> ただし、和を書き並べる順序は考えないものとする。

続いて次の様な例示をして、大きい順で和を表すこと、はじめの自然数も数えることを注意した。

1＝1　(1通り)　2＝2
　　　　　　　　＝1＋1　(2通り)
3＝3
　＝2＋1
　＝1＋1＋1　(3通り)

T1；4だったら何通りかな？
S2：4＝4
　＝3＋1
　＝2＋2
　＝2＋1＋1
　＝1＋1＋1＋1　(5通り)

T３：これは簡単だ。しかし、
例えば、１００を同じ様に和で表すとしたら、このように簡単にできるだろうか？
S４：‥‥‥‥‥‥‥できそうもない。
T５：簡単に書き出したり、数え上げる方法が必要だ。そこで、簡単に書き出したり、数え上げたりする方法を見つけよう。どうしたら見つけられるだろう？
S６：‥‥‥<間をおいて>‥‥‥具体的に調べればよい。
T７：そうだね。この問題文だと具体的に考えるのがむずかしい。もっと問題文を具体的に言換えられないかな。
S８：１００を、１００以下の自然数の和で表す。何通りあるだろうか？
T９：ふむ。具体的な数で考えてみるとわかりやすくなるね。もっと具体的にすると、例えば「８を３つの自然数の和で表す」のは何通りかな？
S10：８＝６＋１＋１
＝５＋２＋１
＝４＋３＋１
＝４＋２＋２
＝３＋３＋２　（５通り）
T11：８は他にも分られるね。何通りかな？　具体的に調べてみて、便利な数えかたを工夫して下さい。
生徒は調べはじめる。直接、８の場合を書き出している者のも多いが、一部の生徒が、１から順に、例示に続けて書き出した。そこでどうやるか聞くと「１から順に調べていき、規則を見つければよい」という答が返ってきた。すなわち、例示からの流れで、これらの生徒は、すでに規則を探す問題と考えている。机間巡視の際に、小さい数から順に、分割が少ない順で書いて行くている生徒の解答をみて、周りの生徒に聞えるように「見やすく書いている」と誉め、書きかたが揃うよう指示した。多くの生徒が、８ぐらいまで書き出した段階で、気が付いたことはないか聞く。すべて書き出していく生徒と、表を利用して解答しようとする生徒がいた。次の２人の解答を取り上げた。

数	1	2	3	4	5	6	7	8
通り	1	2	3	5	7	11	15	

1　1　2　2　4　4　8

S12：差は、２つおきに２倍になっているから次は８で数が８のときは、２３通りになるはずだ。
S13：数が奇数と偶数の時を分け前の数を考えると（前の数の通り数を２倍して１加えた）通りになる。例えば数が５のとき、前の数は３であり、３×２＋１＝７通り。だから数が８のとき１１×２＋１＝２３
T14；８は２３通りでいいか
S15；一部の生徒；２２通りだったよ。
T16：数え残しはないか。
S17：やっぱり２２通り
T18：そうすると決りは狂うね？　決りはないのかな？
ここでチャイム。次の授業までに何通りあるかを知る巧い方法や、書き出すのに便利な

「すでにある書き出しを利用できないか」という発想で、書き出し(Ⅰ)てみるのである。そしてその書き出し方を分析するのである(Ⅱ)。この分析においては、書き出す行為(Ⅰ)にふくまれた活動は、客観的な現象として省みられ、分析の対象となっている。すなわち、ここで「すでにある書き出しを利用する」書き出し方を含む意味での書き出した結果(現象；Ⅰ)は数学化の対象となっている。その分析から意識されるのは、新しい書き出し法である手続きABである。手続きABを利用することで、すでにある書き出しを利用して、新たな場合を書き出すことが可能になる。そして、新しい手続きABは、さらに公式へと定式化される。そしてこの公式は証明される。すると、その公式を利用した組み合わせを求める方法は、すべて書き出すという手続きに代る簡便な方法となり、以後新しい方法として利用されることになる(Ⅲ)。

以上の数学化の過程で、中心的な活動は反省である。反省とは、それまで自分の進めていた行為を客観的に分析し、新しい知見を得る活動である。その反省過程には、次の行為が含まれる。

①．方法の対象化，活動の対象化

Ⅰで営まれた活動において、試行錯誤的な方法や、すでにある書き出しを利用する方法が利用されている。その方法は常に反省の対象となっている。すなわち、前者の方法は、うまくいかないという葛藤状態を創り出し、対象化され、他の方法はないかという方向転換を与えている。そして、後者の方法を対象化して、分析し、定式化することで、新しい公式が得られている。ただし、その方法のみを取り立てて意識的な対象とするのではなく、書き出した結果を客観的に分析する視点として、方法が常に意識的な対象となるのである。そこでは、書き出し結果自体も含めて書き出していく行為そのものが、同時に意識的な対象となっていることに注意されたい。すなわち、方法の対象化において、活動自体も対象化されている。

②．潜在的方法の意識化

Ⅲで数学化の結果として利用される公式による方法は、Ⅰの活動にまったく認められない方法ではなく、すでにある書き出しを利用するという特定の場合に、潜在的に認められる方法である。

③．反省による知見

上記の様に意識的な対象として分析することによって、すなわち反省することによって、必ず知見が得られている。すなわち、試行錯誤的な方法の失敗は、よい方法を探そうと言う知見をもたらしているし、書き出しを利用した方法は、定式化という知見をもたらしている。 特に、この事例では、数学化の結果である公式が、新しい記述言語をもたらしている。すなわち、以後分割数を考えるとき $P^n_k = P^{n-1}_{k-1} + P^{n-k}_k$ という公式を利用すればよく、具体的に書き出し数え上げる必要はなくなる。そこでは、公式が記述言語であり、具体的な数の計算の書き出しは、記述言語ではなくなるのである。

以上が、筆者のこれまでの研究における数学化の枠組みの概略である。

2－3．杉山の公理的方法の枠組み、及び数学化の枠組みとの総合

杉山によれば、公理的方法は、次の２種類の方法で特徴付けられると言える。

1)．根拠を探る。

2). 根拠を基に考える。

上記の事例をこの２種類の方法から、分析する。

根拠を探る行為としては、手続きＡＢでほんとうに書き出せるだろうか？という問いである。この問いは、繰り返し発せられよう。この事実の根拠を探る、すなわち証明するには、どうしても規則ＡＢを定式化する必要が生じる。普通、証明するには、その証明対象である命題を厳密に表現する必要があるからである。そして、証明がなされ、根拠は説明される。

根拠を基に考える行為としては、公式を利用して分割数を求める活動である。そこでは、公式は、分割数を求める公理(ここでは原理・原則の意味に近い)とも言うべきものになっている。

次に、筆者の数学化の枠組み上に、杉山の公理的方法の枠組みを筆者の立場で位置付けることにより、枠組みの総合を行なう。まず、「根拠を探る」活動は、数学化の過程Ⅱに認められる。すなわち、新たな方法を設定する際に、その根拠を探ることが大切になる。また、根拠を基に考える活動は、数学化の過程Ⅰ，Ⅲに認められる。すなわち、Ⅰでは、樹系図的な方法を根拠にした活動や書き出しを利用した方法を根拠にした活動が営まれる。Ⅲでは、新たに得た公式を利用した方法を根拠にした活動が営まれる。Ⅲの公式は、特に公理とも呼ぶべきものであり、Ⅰの方法より卓越している。

以上のような杉山の議論との対応から、総合は、杉山の言う「根拠」を、筆者の言う「方法」と読み代えることで可能になる。すなわち「根拠を探る」とは「方法を求めることであり、その方法の正しい根拠を求める」ことであり、「根拠を基に考える」とは「方法を利用して考える」ことであり、これは前記の③反省による知見にあたる。

この読み代えは筆者の枠組みから読みであり杉山の研究とは同一とわ言えないが、この読みは示唆に富むものである。それは、杉山の公理的方法の研究かた示唆されるところの視点が取り込まれるからである。

その視点の第１は「根拠の比較によるよりよい根拠の追究」である。ギリシャ数学において、ユークリッドの原論が成立するまでに、より根源的な根拠(公理)を求めた論争が展開されたことが、しだいに明らかにされてきた。また、ユークリッド幾何の公理を巡っての、近代の論争から、ヒルベルトの公理系に至るまでも、より論理的に根源的な公理が求められてきた。これらは、常に数学者等が、それぞれが提出した根拠の対比を行ない、よりよい根拠を求めてきたことを物語っている。数学化の過程では、常によりよい方法を選択する為の考察がなされるのである。

第２の視点は、そこにふくまれる「数学的態度」であり、「意志の働き」である。反省という語が、思考の形態にかかわる言葉であるのに対して、根拠を「探ろう」「利用しよう」というのは、態度や意志に関わる言葉である。「どうして～だろう」「もっとうまいやり方はないだろうか」等は、このような態度，意志に関わる用語であり、反省過程では、重要な態度であり、意志である。

以上の視点は、筆者の研究に無かったわけではないが、杉山の研究から特に強調すべき点である。そこで、公理的な方法からみた数学化の過程に含まれるべき行為として、前記の①～③に加え、次の点を加えておく。

④．根拠(方法)を探ろうとすること

方法を調べて、レポート用紙に書いてくることを課題にして、授業を終えた。

第２時

　はじめに１～１０まで実際に書き出したものと、前回出てきた集計表を書込んだプリントを配付した。考えてきたことを発表させる形式の授業進行であった。書き出しかたについては、様々の工夫が出た。

T19：決りはみつかりましたか？

S20：みつからなかった。やはり８から先では狂ってしまう。

T21：そうなると、この表を眺めていても決りは見つかりそうもないな？
　もっと詳しい表を考えた人いないかな？

S22：決りを探そうと思って、横に数、縦にその数を幾つに分割するかで、分割の仕方がそれぞれ何通りあるかの表を作った。でも、特別な決りは見つからなかった。

	自然数									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
分割 1	1	1	1	$\boxed{1}$	1	1	1	1	1	1
2		1	1	$\boxed{2}$	2	3	3	4	4	5
3			1	$\boxed{1}$	2	3	4	5	7	8
4				$\boxed{1}$	1	2	3	5	6	9
5					1	1	2	3	5	7
6						1	1	2	3	5
7							1	1	2	3
8								1	1	2
9									1	1
10										1
分割数(和)	1	2	3	$\boxed{5}$	7	11	15	22	30	42

例えば

$4=4$　　　　　　　分割数１が$\boxed{1}$通り
$=3+1$　　　　　　分割数２が$\boxed{2}$通り
$=2+2$
$=2+1+1$　　　　　分割数３が$\boxed{1}$通り
$=1+1+1+1$　　　　分割数４が$\boxed{1}$通り
　　　　　　　　　　　　　　計$\boxed{5}$通り

T23：詳しい表を作ってくれたな。この表から何かわかることはないかな。

S24：斜に、１，１，２，３，５，７と、ある所から同じ数字が斜に並んでいるのではないか。

S25：斜に出てる数が合計欄の１，２，３，５，７と同じ数が出てくるのではないか。

T26：この表が書き出さずに簡単に作れれば、書き出さなくとも何通りか数えられるな。
　この表はどんな決りで出来ているのだろう。

S27：？

T28：（生徒が何をすべきかわからない、手詰まりな様子を見て）この表の決りは簡単には

見つかりそうもないな。見方をかえて、具体的な書き出しかたからもう一度考え直してみよう。書き出しかたについて工夫した人はいますか？

S29：例えば5なら

	5	→2減す	3＋2
↓	4＋1		2＋1＋2，3＋1＋1
1	3＋1＋1		
減	2＋1＋1＋1		
す	1＋1＋1＋1＋1		

というように、書き出して、異なるものを抜出す。

これと類似の分割の位置をかえながら書き出す工夫や、樹系図式の工夫，（　，/，　，…）の書式を利用して「＋」を省略する工夫等いろいろでた。その際、苦労した点を聞いた。

S30：最後に1を加えると、前の数の書き出しを使って次の数の書き出しの一部が書ける

7＝7 →	8＝8
＝6＋1 →	＝7＋1
＝5＋2 →	＝6＋2
＝4＋3 →	＝6＋1＋1
＝5＋1＋1	＝5＋2＋1
＝4＋2＋1	＝4＋3＋1
＝	＝

それぞれの方法が面白いアイデアであると評価した。そして、それぞれの方法で、どれがよいと思うか手を挙げさせた。自分でやってきたやり方をいいと思う者が多かった。そして、どの方法も、数えもらしを避けることや、異なるものを抜出す作業がたいへんなことを指摘した。S30はこれまでの書き出しを利用できる点で教師の側から評価した。

T31：前の書き出しの末尾に1加えると次の書き出しの一部が書けるというのは便利だな。
プリントに同じ様に末尾に1加えた場合の矢印を書込んでみて。
ところで6＋2の所のように前の書き出しの末尾に1加えたのではない数はどこの書き出しを使えば書けるのだろう？　このままではやっぱり数えもらしがでるね。

ここで時間となった。課題として「新しい表がどんな決りでできているのか？」また「末尾に1加えたものでない場合は何をもとにすれば書けるか？」が残った。これについての考えがまとまった者はレポートを出すことにした。

第3時

第1時に出したレポートを第2時に回収したが、B君のレポートに次のような表があった。次の表と前回の分割数の表をプリントしたものを配った。

		自然数									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
先	1	1	1	1	$\boxed{1}$	1	1	1	1	1	1
	2		1	1	$\boxed{2}$	2	3	3	4	4	5
	3			1	$\boxed{1}$	2	3	4	5	7	8
頭	4				$\boxed{1}$	1	2	3	5	6	9

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
分	2		1	1	2	2	3	3	4	4	5
	3			1	1	2	3	4	5	7	8
	4				1	1	2	3	5	6	9
割	5					1	1	2	3	5	7
	6						1	1	2	3	5
	7							1	1	2	3
	8								1	1	2
	9									1	1
	10										1
分割数(和)		1	2	3	5	7	11	15	22	30	42

横矢印と斜め矢印

S78：6を2つに分割した場合と4を3つに分割した場合を加えればよい。
T79：そうだね。横飛びの矢印はいくつ飛越すの？
S80：分割分だ。
T81：そうだ。分割分だ。（書き出し事例で解説）
横矢印は、そのまま横に対応させるのではなくて、分割分だけ飛び越えるんだね。そうするとこの表を、「末尾に1加える」と「すべてに1加える」という考え方で説明できないか？
S82：末尾に1加えるということは表で斜め矢印を表していて、それぞれに1加えることは表で横飛び矢印をあらわしていて、矢印の数字を足せば矢印の集る所が何とおりかわかる。
T83：そうだ。「末尾に1加える」ことと「すべてに1加える」という考え方を使うとすべて書き出せそうだし表も作れそうだ。このように考える元になることを原理と言う。2つの原理でほんとうにすべて書き出せるかどうか、表ができるかどうか調べみて下さい。
これを次回までの課題とした。

第4時

T84；前回はそれまでの書き出しを利用した書き出し方は、「末尾に1加える」「すべてに1加える」という2つの原理からなること、分割数の表が横矢印、斜め矢印で書けることをやりました。ほんとうにそうなるか調べましたか(机間巡視)。
T85；2つの原理で必ず書き出せますか？
S86；書き出せる。末尾は1か1でないかどちらかで、末尾が1のときは、前の数をそのまま利用して書けるし、末尾が1でないときは、それぞれから1を引いた数の書き出しは、その数より小さいから、すでに書き出せているので、それを使えば書ける。
T87；表の矢印の意味は？　斜め矢印の意味はなんだったっけ？
S88；斜め矢印は「末尾に1加えること」に対応していて、末尾が1増加するから、数は1増えて、分割も1増えるので、表では斜めの対応になる。
T89；横矢印の意味は？
S90；横矢印は「それぞれすべてに1加える」ことなので、数は分割分だけ増加し、分割

数 5					1	1	2	3	5	7
6						1	1	2	3	5
7							1	1	2	3
8								1	1	2
9									1	1
10										1
分割数(和)	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42

T32：B君この表はどうやって作ったのか？

S33；B君：この表は、よこに数を、縦に分割したときの先頭の数を書いて、それぞれ何通りあるか調べた表です。

例えば、

4＝4	先頭数4が1通り
＝3＋1	先頭数3が1通り
＝2＋2	先頭数2が2通り
＝2＋1＋1	
＝1＋1＋1＋1	先頭数1が1通り
	計5通り

この表をみてなんか関係が見つかるかどうか調べたが何もわからなかった。

T34：この表と前回考えた表を見比べて、なにか気がつくことはないか？

S35：まったく同じ表だ！

T36：そう同じ表だ。私も全く違う発想で作った表が全く同じ様に数字が並んでいることにはびっくりした。するとこの表は何か秘密がありそうだね？ 君たちよくこんな表を思いついたね。2種類の同じ様な表が出てきてで混乱するといけないので、前回の表を「分割数の表」、B君の表を「先頭数の表」と呼ぼう。2つの表がどうして同じになるのか知りたい所だが、まず今日は前回の課題でもあった「分割数の表」を作り出す決りを見つけることに専念しよう。何か決りは見つかったかな(以上5分)。

S37：例えば、7の3分割の4通りは、左へ3つもどった数4の3分割までの和に一致する。

T38：どういくこと(予想外で、意味が全く分らず) 黒板で説明しなおさせる。

S39；例えば、･･･、他でも･･･。

	自然数 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
分 1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1	1	2	2	3	3	4	4	5
3			1	1	2	3	4	5	7	8
4				1	1	2	3	5	6	9
割 5					1	1	2	3	5	7
6						1	1	2	3	5

TS40：一同；オー！

T41：ほんとだ。この決りを利用すれば逆に表をいくらも書いていけるな。
　といって例示する。
T42：前回もいろいろ決りが見つかったけど、どうしてこのような決りがあるのだろうか？
S43：？
T44：このような決りが成立つには理由があるはずだ。この表は、すべて書き出してみて数えて作った表だったね。前回の授業では、書き出し方もやったね。課題も出ていた。書き出し方から、どうにか説明できないかな。書き出し方で、前回課題に残った方法はなんだった。
S45：末尾に１加えると前の書き出しから、次の数の書き出しがかなりかけたこと。
T46：末尾に１加えるということは、この表で何を意味しているのであろう。
S47：？
T48：末尾に１加えると、数は１増えるな。分割はどうかな？
S49：１増える。
T50：だから･･･？　表では何を意味してるの？
　･･･
S51：斜に数字がずれることを意味している。
T52：どういくこと？　下のように黒板の表で説明させる。

	自然数 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
分割 1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1	1	2	2	3	3	4	4	5
3			1	1	2	3	4	5	7	8
4				1	1	2	3	5	6	9
5					1	1	2	3	5	7
6						1	1	2	3	5
7							1	1	2	3
8								1	1	2
9									1	1
10										1
分割数(和)	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42

斜め矢印を入れる。

T53：同じ数字が対応するときと、増える時があるね。
　増えるときは具体的には何がふえたの？
S54：？
T55：前回、課題があったよね？　なんだっけ。
S56：･･･末尾に１加えた場合でないときだ。
T57：そうだ！　末尾に１加えた場合以外の時が、そのまま対応するのではなく、数が増えるときだ。（下の図で説明）

$1 = 1$　　　$2 = 2$
$\qquad\qquad\quad = 1 + 1$

$$\begin{array}{ll}
3 = 3 & 4 = 4 \\
 = 2 + 1 & = 3 + 1 \\
 = 1 + 1 + 1 & = 2 + 2 \\
 & = 2 + 1 + 1 \\
 & = 1 + 1 + 1 + 1
\end{array}$$

T58：２＋２や４は何を元にすれば書けるのかな？
S59：２＋２は２の末尾に２を足した場合だ。
T60：４は？
S61：考えなくても最初にかくからいらない。
S62：０の末尾に４加えた場合ともみれる。
T63：０は考えてなかったな。それに数が、大きくなると大変だ、末尾に３を加えた場合、４の場合、５の場合、・・・・とどんどん増えて、いろいろな場合を考えなくてはいけなくて大変だよ。もっとうまい考え方はないかな？
S64：？
T65：末尾でなければどうかな。
S67：先頭に１加える。
T68：先頭に１加えると、末尾に１加えるときとの重なりがでるよ。例えば，２＋１＋１の先頭に１加えると１＋２＋１＋１、大きい順に並べたら、２＋１＋１＋１で末尾に１加えるのと同じ事。間に１加えても同じ事だ。もっと他のアイデアはないか？
S69：？
T70：１付け加えるだけだとだめみたいだな？　ある数を加える、例えば１加えるというのでなければどうだろう？
S71：・・・・
T72：すべてに１加えるとしたらどうかな？　例えば、２＋２はそれぞれの数字に１加えたとすれば、何をもとに書ける？
S73：１＋１
T74：そうだね。じゃあ、５を書き出した表を見てそれぞれがどれを元にすれば書き出せるか、４までの書き出しから矢印を引いてみて
（机間巡視で、書き出しにおける矢印の引きかたと意味の指導）
T75：それじゃあ、すべてに１加えるというのは表のどんな矢印になるか考えてみよう。例えば４を２つに分割するのは２通り、１通りは末尾に１加えてできるから３を１つに分割した場合からくる。もう一通りはどこからくるの。
S76：２を２つに分割した１通りからだ。
T77：そうだ！　これを横飛びの矢印で表そう。
じゃあ７を３つに分割した場合は？

	自然数									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

の回数は変らないから

$\boxed{\text{T 91}}$；それでは、前に表を見てわかることを言ってもらったけど、それをこの原理で説明できないかな。表をみてわかることには、次の様なのがあったね。（板書）

①．ななめにみると、ある所から同じ数がならんでいる？

②．その数のならびは、分割数と同じ様にならんでいる？

③．下の図の様に、縦の和とその横の方にある数が一致している？

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	1	1	1	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	1	1	1	1	1
分	2		1	1	$\boxed{2}$	$\boxed{2}$	3	3	4	4	5
	3			1	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	3	$\boxed{4}$	5	7	8
	4				1	$\boxed{1}$	2	3	5	6	9
割	5					$\boxed{1}$	1	2	3	5	$\boxed{7}$
	6						1	1	2	3	5
	7							1	1	2	3
	8								1	1	2

$\boxed{\text{T 92}}$；①はどうしてかな？

$\boxed{\text{S 93}}$；斜め矢印だから

$\boxed{\text{T 94}}$；そうだね。斜め矢印は「末尾に１加える」ことだった。横矢印がなくて、斜め矢印だけになるところから、同じ数がならぶわけだ。しかし、どうして横矢印がないのだろう。考えてみて。

…

$\boxed{\text{S 95}}$；横矢印は「すべてに１加える」ことで、分割した回数は変らないで、数が分割分だけ大きくなる矢印だから、分割分だけ飛び越える。だから、分割が大きくなると、最初の方では、横矢印がなくて、斜め矢印だけになり、同じ数がならぶことになる。

（こちらで書き出し事例で説明し、理解を促す。）

$\boxed{\text{T 96}}$；②で分割数の並びとなぜ、斜の数字がおなじなんだろうか？

どうやって説明すればよいかわからないから、③から考えることにしよう。

どうしてかな？

…

$\boxed{\text{S 97}}$；下の様に、横矢印と斜め矢印が対応するからだ。

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	1	1	1	$\boxed{1}$	1	1	1	1	1	1
分	2		1	1	$\boxed{2}$	2	3	3	4	4	5
	3			1	$\boxed{1}$	2	3	$\boxed{4}$	5	7	8

$\boxed{\text{T 98}}$；オー、矢印の対応をから、でどこをたどれば、４は１と２と１からできているわけか(書き出し事例で説明)。

じゃあ、②は説明できないかな。

…

$\boxed{\text{S 99}}$；③の説明と同じ様に考えると、例えば８の４分割は５で、これは４の分割数５と同

じになる。同じ様に、6の3分割は3で、これは3の分割数3に同じになる。

		自然数									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	1	1	1	$\boxed{1}$	1	1	1	1	1	1
分	2		1	1	$\boxed{2}$	2	3	3	4	4	5
	3			1	$\boxed{1}$	2	3	4	5	7	8
	4				$\boxed{1}$	1	2	3	$\boxed{5}$	6	9
割	5					1	1	2	3	5	7
	6						1	1	2	3	5
	7							1	1	2	3
	8								1	1	2
	9									1	1
	10										1
分割数(和)		1	2	3	$\boxed{5}$	7	11	15	22	30	42

S 100；表の空白部分を0と考えると、①も説明できます！

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	1	1	1	$\boxed{1}$	1	1	1	1	1	1
分	2	0	1	1	$\boxed{2}$	2	3	3	4	4	5
	3	0	0	1	$\boxed{1}$	2	3	4	5	7	8
	4	0	0	0	$\boxed{1}$	1	2	3	$\boxed{5}$	6	9
割	5	0	0	0	$\boxed{0}$	1	1	2	3	$\boxed{5}$	7
	6	0	0	0	$\boxed{0}$	0	1	1	2	3	$\boxed{5}$
	7	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3
	8	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2
	9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
分割数(和)		1	2	3	$\boxed{5}$	7	11	15	22	30	42

例えば、上の表で、同じ数が並ぶのは、0を加えても変らないからです。

T 101；オー、そうすると、③の考え方で、①も②も説明できるわけだ。すごいな～。ところで③の考え方の基はなんだった。

S 102：斜め矢印と横矢印だ。

T 103：矢印の意味はなんだった。

S 104：斜め矢印が「末尾に1加える」，横矢印が「すべてに1加える」

T 105：そうだった。結局、この2つの原理から表を作ることができるわけだ。さて、分割数がいくつか調べるのに、すべて書き出す必要はありますか。

S 106；ない。表を書けば良い。

T 107：そうだ。もう分割数を求めるのに、すべて書き出す必要はなく、2つの原理にしたがって、表を書けばよいわけだ。結局、2つの原理を探し出したことで、その原

理を基にすれば、書き出さなくともこの問題が解くことができるようになった。数学では、このように原理を探していくことが大切であり、その原理がわかってしまうと、今度はその原理を基に考えることができる。

この後、まとめプリント(資料参照)を配り、読んでおくことと問題解答を宿題にし、特に先頭数の表についてその原理を探すことを課題とした。

第4時以降

第4時以降、生徒のレポートを報告する形式で、何本かのレポートを紹介した。従って、この後も授業は続いている。その内容の一部は、資料を参照されたい。なお、分割数と先頭数は、いわば相対的な概念であり、レポートの紹介では、相対性についても言及した(それらの解説は、ここでは省略させていただく)。

3－2．授業の評価

授業者の意図である「数学認識を深める」こと、特に公理的な考え方のふかまりについて以下では、考察し評価したい。

<u>授業をしてみて</u>

まず、授業者の立場から、実践の評価を行なう。書き出しに沢山の時間を要し、肝心な考察が授業時間内で扱いきれないため毎回レポートを出した。生徒にとっては容易でない題材であったように思う。レポートを書く体験は、はじめてであり、その戸惑いもあったようだ。特に、第3時以降、表や自分の行為を反省的に分析することや、表と書き出しとの対応関係を解釈しながら考察を進めることになれる速さに、生徒の能力差が出て、説明を創り出す生徒と説明を聞き理解する側に回る生徒とに、しだいに二極分化して行った。毎時間ごとに出される課題を、何時間もかけて懸命に考えてきて、授業で積極的に発言する生徒と、そこまで考えきれなかった生徒の差が、この二極分化の背景にあると考えている。ただし、聞く側にまわった生徒も聞いてみると説明を理解していたし、理解できるよう配慮した。この学習の理解には、自宅での復習と時間毎に出される課題を考えることが前提になる。そのため、特に、自宅学習を怠った一部の生徒は、回を重ねる毎にわからなくなっていったようだ。このような生徒の存在が第3時以後気になっていたので、第4時のまとめプリントは、練習問題を付けて、理解を促した。時間をかけて、理解をはかりながら、所々で練習を適切に積めば、このような二極分化は避けられようが、教科書のように細かなステップをふんだ授業過程は、数学創造の過程を体験させたいとする意図からすれば反する。また、この問題が生徒を引きつけ続ける時間としても、このあたりが限度であるように思い、以後は、レポートをプリントする形でのみ、生徒とのやりとりを進めた。最終的な理解状況は後述する。

授業実践過程で生徒の探求を促す上で困った点は、生徒から必要とするアイデアが生じない時である。特に、第2時で$\boxed{\text{S 30}}$の末尾に1加えるアイデアと、第3時で$\boxed{\text{T 58}}$以降の部分で「末尾に1加える」という視点から生徒がなかなか離れられずに「末尾に2加える」というような発想が続いてしまった点などは困ったところである。生徒のから出てきた様々なアイデア・発想は、実際には意味をもつ発想であったが、それぞれを詳しく突っ込んで行くと議論が異なる方向に進展し、授業時数がさらに必要になるため、$\boxed{\text{T 31}}$では教師の価値判断が生徒を引張り込む形で入っているし、$\boxed{\text{T 63}}$では発想の転換をはかった。さらに、

$\boxed{\text{T63}}$の転換は、$\boxed{\text{T72}}$ではこちらから教える形になってしまった。

生徒の達成状況

事後テストとして、次頁の問題を出題した。その結果を述べる。(1)は、原理を理解しているかどうかを評価している。(2)は原理を基に説明することができるかどうかを評価している。(1)，(2)に対する正当率は、いずれも８割以上であり、非常に高い達成状況と言える。この結果から、ほとんどの生徒が理解したと言えよう。

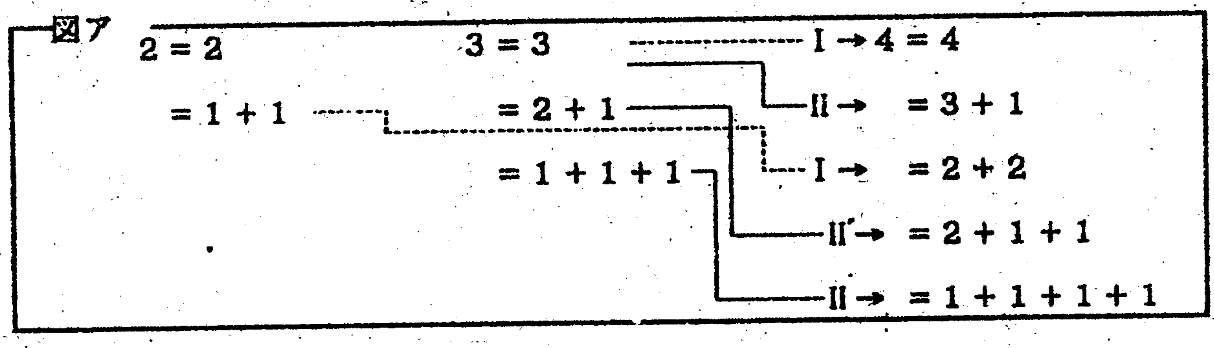
解答と正当率

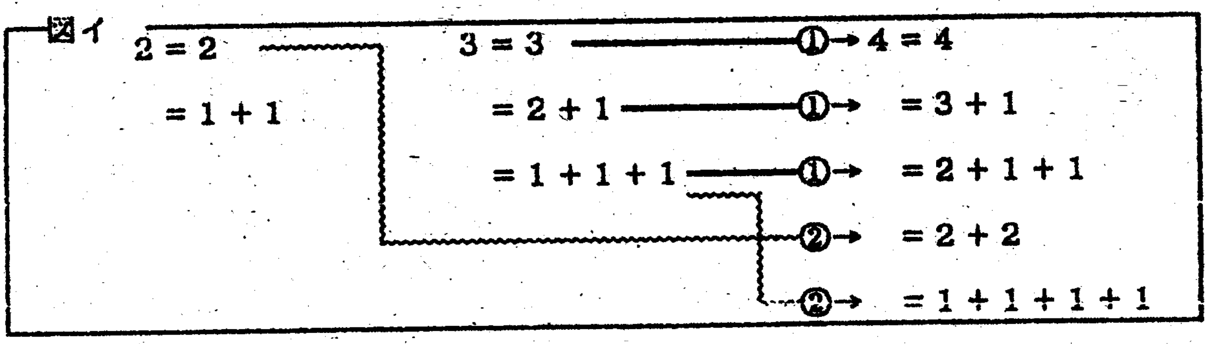
(1)　ア．分割数(正当率９６％)　　イ．先頭数(正当率９６％)
Ⅰ．すべての項に１加える(正当率８８％)　①．先頭の項に１加える(正当率８５％)
Ⅱ．末尾に「＋１」付ける(正当率９１％)　②．先頭に同じ数を付ける(正当率８３％)
(2)　第４時の授業参照(正当率８０％)

事後テスト

問．「自然数を自然数の和で表わす」問題について、次の問いに答えなさい。

(1)．次の枠内の図ア，イは、分割数・先頭数どちらかの対応を表わす矢印を書込んだ図であり、矢印についている記号Ⅰ，Ⅱ，①，②は分割数、先頭数の原理に対応している。解答用紙にア，イそれぞれが何の図か、また、記号Ⅰ，Ⅱ，①，②はどんな原理かを書きなさい。





(2)．次の分割数の表で、ななめに同じ数字がならぶが、この数字はそれぞれの分割の合計の数字と一致している。その理由を説明しなさい。

	自然数												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6
3			1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14
分4				1	1	2	3	5	6	9	11	15	18
割5					1	1	2	3	5	7	10	13	18
数6						1	1	2	3	5	7	11	14
13													1
合計	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101

；途中略

(3).「自然数を自然数の和で表わす」問題の考察を通して、数学についてもった感想を書きなさい。

生徒の感想

事後テスト(3)の生徒からの感想は、おおよそ以下のようにいくつかのタイプがあった。

その1；小学校のときは、やり方を教わって、憶えて問題を解いていたが、この考察で、じっくり考えればやり方がわかることを学んだ。そのとき、いろいろな角度からみることが大切だと思った。

その2；はじめは、ばくぜんとした問題だったが、分割数，先頭数とどんどん問題が広がっていき、わかればわかるほどわからないことのできてくる数学は、面白いとおもった。

はじめは、簡単に法則がみつかると思ったが、考えてみるとむずかしく、いろいろな発展があった。わかったときは、うれしかったし、できたのでよかった。

その3；数学で考えるとき、根拠を探るのが大切だが、根拠を調べて決まりを説明することはむずかしいと思った。

決まりに従って問題を解くのではなく、決まりを見つけながらやるところがむずかしかった(又は、逆に面白かった)。

感想を読むと、全く同じ内容について「難しかった」という否定的意見と「楽しかった」という肯定的意見がみられた。肯定的意見の者は、授業でも積極的に発言したし、自宅でもよく考えているようだった。否定的意見の者の多くは、授業では聞く側にまわる者が多かった。感想はこのように2つに分れるが、感想の内容から、この課題によって生徒は数学のどのような側面を意識したかをみると、次のような側面があげられる。

ア．数学は発展し続ける。
イ．数学では根拠を調べることが大切である。
ウ．数学では多様な見方をする。
エ．数学では問題の解きかたは最初から決まっていない。
オ．数学では問題を解くとき決まりをみつけながらやっていく。
カ．数学では考えるとき決まりを利用して解答する。
キ．数学ではやり方を憶えるのではなく、やり方を探して考える。

このような数学の側面を生徒が意識できたことは、「数学とは何か」というテーマでの授業が、公理的な考え方も含めて、一定の成果を得ていることを示している。

4．授業過程の分析

ここでは、授業過程を分析しながら、数学化の過程の特徴や、数学化が進展する契機や原動力、数学化の前後のでの思考変容等について実践的に論じたい。まず、2で述べた枠組みから、授業過程を分析する。次に、授業を通しての課題の連鎖から分析する。

4－1．数学化と公理的な考え方からの分析

活動の層；まず、授業過程を、数学化の過程の活動の層として、把握しなおす。その層は、次のような、活動の層であった。

＜数学化の過程の活動の層＞

Ⅰ．数学化の対象を創り出す、ある種の方法による活動；
Ⅱ．Ⅰの活動を反省する活動；
Ⅲ．数学化の結果として反省から得た新たな方法による活動；

数学化の対象となったのは具体的な書き出しかたであり、数学化の結果は2つの原理に基づく考察ができることである。

第1時の授業では、多くの生徒は簡単な問題と考えて取り組んだ。最初は、具体的に書き出していき、表を作って帰納的に求めようとしたが、決りは見つからず挫折している。そして、自宅でさらに考えることが、課題になった。そして、さらに詳しく分析した分割数の表や、書き出しかたの様々な工夫が生れた。第2時は、これらの結果を発表することが授業の中で進められた。その中には、S 22の分割数の表やS 30の末尾に1加えるアイデアも見られる。以上は、Ⅰの数学化の対象を創り出す活動である。

第2時の授業では、同時に、生徒の考えを発表させ、互に評価し合うことで、活動の反省が始っている。そして、さらに表や末尾に1加える以外の場合の分析が課題として出ている。これは、さらに分析を促すものである。そして、第3時では、生徒から出てきた先頭数の表を配付し、表の重要性を意識させるとともに、第2時の課題である表の分析から入っていった。そして、表からの新たな発見S 37を得た後、末尾に1加える場合の表の考察へ入っていった。そして、表の斜め矢印との対応を扱うと共に、前回の課題であったそれ以外の場合の考察へと入っていき、それぞれに1加えることと横矢印の考え方を獲得している。そして、2つの原理で実際に書き出せるか、表ができるかを実際調べることを課題にした。以上は、ⅡのⅠの活動を反省する活動である。

第4時の授業は、第3時の課題の復習から入り、これまでにわかった表の構造①，②，③を2つの原理から説明することを考察した。そして、③の構造が、①，②を説明することを発見した。以上は、Ⅲの反省から得た方法を利用した活動である。

以上のような、数学化の活動の層がおおまかに認められる。数学化の前後において思考の内容は全く変容している。すなわち、数学化以前においては、すべて書き出す工夫が思考の内容であるが、数学化後では、2つの原理を基に説明したり、表を作ったりすることが思考の内容となる。

数学化の活動の層は、実際には往来が認められる。例えば、第3時の課題である「2つの原理で書き出せるか，表は2つの原理で作れるか」などは、活動Ⅰと活動Ⅲのあいだの往来であり、第4時では、表の矢印と原理の間の解釈が考察を進める上で重要になってお

り、そこでは実際の書き出し事例が常に説明にあがる。

上記の層は、4時間を通しての層であり、さらに細かな小数学化を認めることができる。例えば、第1時では、具体的な書き出しから、表を作って帰納的に法則を調べようとした。結果的には挫折しているが、具体的な書き出しから、法則への小数学化と言えよう。

次に、特にIIの反省活動の内容を分析する。

方法の対象化，活動の対象化

方法の対象化，活動の対象化は、所々に認められる。ここでは、授業過程に認められる対象化に結びつくアイデアや発問，発言をいくつか取り上げる。第1時では「決りをみつける」という考え方が、表を対象化する源になっている。その対象化の結果が、S12やS13である。第2時では分割数の表の決りをみつけようとしており、S24，S25ではその決りがみつけられている。第2時で取り上げられたS29，S30などの様々なアイデアは、個人のアイデアが取り上げることで、教室全体で対象化され、どれが良い方法かというように評価されている。以上は、非常に細かな対象化である。

このような対象化が繰り返されながら、第3時は、先頭数の表を取り上げることで、再び分割数の表を対象化している(T36)。そしてT42では「前回もいろいろ決りがみつかったけど、どうしてこのようなきまりがあるのだろうか」，T44では「このような決りが成り立つには、理由があるはずだ。この表は、すべて書き出してみて数えて作った表だったね。前回の授業では、書き出しかたもやったね。課題も出ていた、書き出しかたから、どうにか説明できないかな･･･」と発言している。この発問における対象化は、それまでの書き出しかたから表を説明しようとするもので、これまでの活動を数学化の対象化しようとする根本的な問いである。この発問によって、これまでの書き出しを利用して書き出していく方法と、分割数の表の分析結果を比較した説明を求める流れができていく。そして2つの原理と2種類の矢印のアイデアへいきつくのである。

数学化において重要な意味をもつ分割数の表も、対象化されているが、これについては、後でまたふれる。

潜在的方法の意識化

この数学化において様々な方法が意識化されるが、特に重要なのは2つの原理の意識化である。「末尾に1加える」方法の意識化は、S30で最初になされるが、この段階では、他の様々な書き出しかたと同じ程度の認識であり、取り立てて重要なものと意識されていない。その意味でいまだ潜在的である。この方法を教師の側からT31で、これまでの書き出しを利用する点で評価し、「末尾に1加える場合以外の考察」を次回への課題に加えている。第3時では「末尾に1加える」方法は、表の分析においてT46で意識化される。ここにおいて、この方法は完全に意識化され、表を分析する方法としての意味を持ち始める。もう一つの原理「すべてに1加える」方法は、生徒からは意識されず教師の側からT72で指摘する形で意識させている。この意識化から、それまでの文脈に従って、表の分析方法としての意味をもっていくのである。第4時では、2つの原理は表を分析する方法として意味をもつに至る。

この数学化において、意識化されるもう一つの重要な方法は、分割数の表と先頭数の表である。この表は、第1時で帰納的に作られた表の挫折が基になっており、さらに詳しい

表を作る過程で、作られたものである。2つの表が同一になることから、表は強く意識されている。

反省による知見

反省から得られる知見は、2つの原理に基づく考察の仕方であり、表である。表を原理を基に考えるという新しい知見は、それまでの書き出さねばわからない状況を、超越している。それまでの分割数の記述言語は、実際の書き出し方によるが、表はそれにかわる新しい記述言語となっている。

次に公理的な考え方を視点に分析する。

根拠を探る, 根拠を利用する

この事例で、根拠を探ったり、利用したりする流れは数学化の原動力となっているが、どのような授業の文脈に認められるかを分析する。根拠を探ろうとする文脈は、第1時の帰納的に表の規則性を探そうとする考え方からすでに表れている。その文脈で、もっと詳しい表を作る流れが産まれ、第2時で分割数の表が出てきている。表にいくつかの規則性が認められるが、表だけで規則性を説明する考え方は、その段階で挫折する。そしてT26, T28で、方向転換し、表を作り出す規則性を考える為に、改めて書き出しかたを考え直す。そして、後で根拠となる原理「末尾に1加える」が意識される。第3時では、先頭数の表を出して、分割数の表と同じであることから、表の規則性を探ろうとする文脈をT36で改めて強化している。S39では表を作り出す規則性がみつかっている。そして、もう一つの原理「すべてに1加える」が意識されるとともに、表をその原理で表を説明する手がかりを得る。第4時では、T91から表の規則性をその原理で説明しようとする流れができている。2つの原理は、この段階で表の公理とも呼ぶべきものになっている。すなわち、授業の文脈は、表の規則性をみいだし、説明しようとする文脈でできており、その文脈上に2つの原理が探られ利用されている。

根拠の比較・評価

根拠の比較と評価は、まず、S29からT31にかけて書き出し法を比較・評価することで行なわれた。この評価は非常に曖昧なものとなっているが、その理由は、その書き出し法の有効性を、具体的に書き出すレベルで論じなければならないことである。特に「それまでの書き出しを利用する方法は、この段階では、他の方法に比べてそれほど優位ではなく、自分のやりやすい方法がベストなのである。最終的に2つの原理を利用した方法の優位性は、2つの原理が表の根拠となることを知る第4時で明らかになる。具体的には、T101からT107にかけて評価される。すなわち、表を作るのに、すべて書き出す必要はなく、2つの原理から生成すればよいのである。この評価によって、他の書き出し法と比較した際の優位性が確定するのである。こどもの発想からすれば、第4時にならないと評価が定まらないことは、望ましいとは言えないが、教材の性格上しかたない点である。

第4時以降は生徒からのレポートを配付して解説したが、根拠の比較は、分割数と先頭数の原理、矢印の比較として扱われ、原理の発見から、さらには相対性の認識へ至っている。

4－2．課題(問い)の連鎖

続いて、２で述べた枠組み以外から特に課題の連鎖を示し、さらに上記の数学化の過程を分析する。授業では、繰返し新たな課題が産れ、留る処をしらない。ここでは、どのように課題が連鎖しているかを、プロットする。課題(発問や疑問を含む)の流れは、以下の通りである。

第１時

課題1；問題(全体の課題)

↓

課題2；８の場合(T 11)

↓

帰納的に表の規則性を探る　　　　直接８の場合を書き出す

↓

表の規則性は、わからない←

↓

課題3；表の規則性はないのか？　　うまい書き出しかたはないのか？(第２時への課題)

第２時

↓

課題4；分割数の表の規則性は？(T 23)

↓

S 24，S 25

↓

課題5；分割数の表はどんな規則で作れるか？(T 26)

S 29～S 30

↓

課題6；末尾に１加える以外の場合はどのように？(T 31)

第３時への課題　　　　第３時への課題

第３時

課題7；先頭数と分割数の表は同じか(T 36)

↓

S 39；表を書き出す規則

↓

課題8 書き出しかたから表の規則性は説明できないか(T 44)←

↓

課題9；末尾に１加えることの表の意味は(T 46)

↓

S 51

↓

課題10；末尾に１加える以外の表の意味は(T 53～T 57)

↓

～T81

↓

課題11 2つの原理で表ができるか、2つの原理で実際に書き出せるか？（第4時への課題）

第4時

↓

T85，S86

課題8'；書き出し原理から表の規則性は説明できないか（T91）

↓

～S100

新たな課題

課題12；先頭数の表の原理は何か？　課題7；先頭数と分割数の表は同じか

以上のように、課題は繰り返し産れている。課題は、言換えれば問いであるが、必ずしも数学的な問題ではない。数学的な問題と呼ぶべきものは、最初の問だけであり、あとはその解決の為に生じる問いとその考察の連鎖なのである。数学化の過程は、このような問いの連鎖によることが、この事例によく認められる。実際、上記の問いの連鎖を数学化の立場で類型するなら、第2時までの問いは主として数学化の活動Ⅰに関係する内容である。ただし、問いは、通常、活動の意識的な反省を含むので、Ⅱの意味も含んでいる。表と書き出し法と結びつけた課題8からは完全に活動Ⅱに関する内容となり、書き出し法を反省，分析しつつ、表の矢印と書き出し原理をしだいに明確化している。第4時の課題8'は、以前と同じ問いであるが、原理、矢印を知った後での分析であり、活動Ⅲに関する内容となる。

数学化の過程をこのような問いの連鎖とみたとき、特にⅡの反省活動が問いの連鎖によって深まっていることが明瞭になる。反省に有効な役割を担っているのは、表である。表を作り出し、その規則性を発見し、説明しようとした流れ自体が、数々の問いを産み、それまでやってきた活動を分析する原動力になっていることがわかる。また、表を産み出したことが、具体的な書き出しとを捨象した分割数の表現方法につながり、数学化の成果を豊かなものとしている。実際、第1時の最終課題3から表と具体的な書き出しの2つの考察が進行しており、課題8から相互関係の分析で反省が深まっている。ここで表がなければ、2つの原理は、単なる書き出し方としての意味しか持ち得ないし、原理を基に考察をしていくⅢの考察には至らないのである。

筆者はかって数学化において、推論形態が変ることを論じたが、このような推論形態の変更はそれを表現する言語系の変更にともなうものである。言葉としての表が、この言語変更に寄与していることが認められる。2で述べた議論ではP^n_xという抽象的な言語であったが、中学段階のこの実践では表がその言葉になっている。言語系の変更は特に課題8以降で認められる。そこでは、具体的な書き出し言語と表言語との相互の翻訳作業が活発に展開されている。すなわち、「具体的な書き出しにおける意味」と「表における意味」との対応を論じているのである。先に、第3時以降、授業に活発に参加する生徒と聞く側にまわる生徒とにしだいに教室が二極分化していったことを指摘したが、その二極分化は、この二種類の言語の混在に伴っているのである。そして、第4時で、2つの原理と2つの

矢印の意味の対応が確立すると、2種類の言語間の翻訳は非常にスムーズになる。その結果が、大多数の生徒が理解した状態に至ったと考える。

5．結び

筆者はこれまで数学化の活動を理論的に分析してきた。この報告では授業過程を分析する枠組みとしてその研究を活用した。特に、理論的な研究において、事例の考察は直線的であるが、1クラスの一斉指導における数学化の授業は、生徒から多様な発想・アイデアが飛び出し復線形的になり、数学的な考察のダイナミズムに包まれる。この点を明瞭に示したことが、これまでの研究と比較しての新しさである。特に4での分析から、新しく強調すべき点として次の点が示唆される。

①．数学化の過程の活動の層は、実際には、問いの連鎖により進行する。

②．数学化の過程の進行において、根拠を探したり根拠を利用しようとする態度が、考察の原動力となり、文脈を作る。

③．数学化において、分割数の表にみられるような、より規則性をみいだしやすい表現を作っていくことは、新たな思考の発展をもたらす可能性を含んでいる。

特に、①は、従来の筆者の研究ではあまり扱ってこなかった問題である。問いの連鎖に関する先行研究に「問題の発展的取扱い」の研究[6]があるが、この研究での問いは数学の問題であり、問題の条件の変更がその中心的な方法である。そこでは、知識生産との関連は理論的には論じられているものの、その実践事例においてはあまり扱われていないように思う。一般に授業は問いの連鎖であるが、問いの連鎖と数学化の関連は、授業過程における知識生産を考察する視点としての方向性を示唆すると考える。実際、この事例において、問いの連鎖は、数学化の過程における知識生産と関連して読むことができたのである。これは、筆者のこれまでの研究になかった点である。

参考文献

1)古藤怜「課題学習について」数学教育研究　第4号　上越教育大学数学教室1989
2)拙稿「数学化の立場からの創造的な学習過程の構成(Ⅰ)～(Ⅵ)」
　筑波数学教育研究　vol.3～7，8-B
3)例えば、岩波数学入門シリーズ「順列組合せと確率」等参照
4)杉山吉茂「公理的方法に基づく算数・数学の学習指導」東洋館
5)拙稿2)参照
6)沢田・竹内「問題から問題へ」東洋館

資料

分割数　ＶＳ．先頭数；生徒からのレポート

〈2時限目アワレ〉

1=1

2=2
=1+1

3=3
=2+1
=1+1+1

4=4
=3+1
=2+2
=2+1+1
=1+1+1+1

5=5
=4+1
=3+2
=3+1+1
=2+2+1
=2+1+1+1
=1+1+1+1+1

6=6
=5+1
=4+2
=3+3
=4+1+1
=3+2+1
=2+2+2
=3+1+1+1
=2+2+1+1
=2+1+1+1+1
=1+1+1+1+1+1

7=7
=6+1
=5+2
=4+3
=5+1+1
=4+2+1
=3+3+1
=2+2+2.
=4+1+1+1
=3+2+1+1
=2+2+2+1
=3+1+1+1+1
=2+2+1+1+1
=2+1+1+1+1+1
=1+1+1+1+1+1+1

8=8
=7+1
=6+2
=5+3
=4+4
=6+1+1
=5+2+1
=4+3+1
=4+2+2
=3+3+2
=5+1+1+1
=4+2+1+1
=3+3+1+1
=3+2+2+1
=2+2+2+2
=4+1+1+1+1
=3+2+1+1+1
=2+2+2+1+1
=3+1+1+1+1+1
=2+2+1+1+1+1
=2+1+1+1+1+1+1
=1+1+1+1+1+1+1+1

9=9
=8+1
=7+2
=6+3
=5+4
=7+1+1
=6+2+1
=5+3+1
=4+4+1
=5+2+2
=4+3+2
=3+3+3
=6+1+1+1
=5+2+1+1
=4+3+1+1
=4+2+2+1
=3+3+2+1
=3+2+2+2
=5+1+1+1+1
=4+2+1+1+1
=3+3+1+1+1
=3+2+2+1+1
=2+2+2+2+1
=4+1+1+1+1+1
=3+2+1+1+1+1
=2+2+2+1+1+1
=3+1+1+1+1+1+1
=2+2+1+1+1+1+1
=2+1+1+1+1+1+1+1
=1+1+1+1+1+1+1+1+1

前回の授業でわかったことは？ ①

数字	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
通り	1	2	3	5	7	11	15	22	30	

10=

4時間目プリント

〈まとめと課題プリント：中1，代数〉

問.「自然数を ~~無~~ 自然数の和で表す，表し方は何通りあるだろうか？」

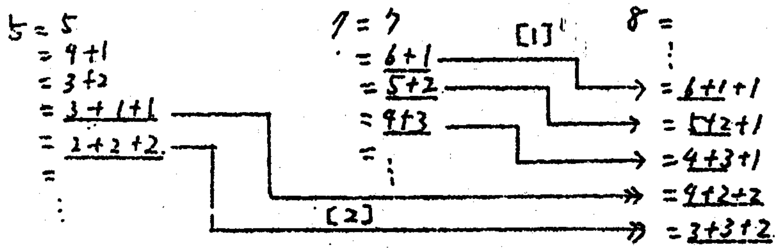
ただし，和の順序は区別しないものとする。

この問題について，特に表し方を数え上げる，簡単な方法を探してきた。3時間の授業とレポートを通して，次のような和を書き出す原理のあることがわかった（これは，大学の数学の内容も含まれている）

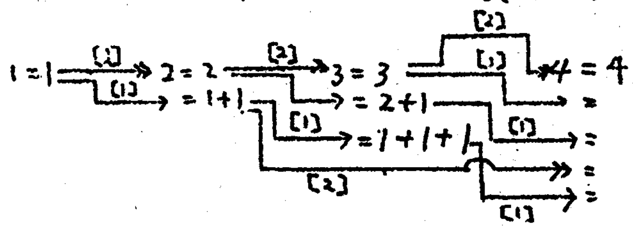
原理

[1] 末尾に1加える　，[2] すべてに1加える。

例えば，以下のようにこの原理を利用して，対応を考えられる。



問1. この原理を利用して，1〜3から，4を書き出しなさい。



問2. 次は5を書き表したものです。原理[2]を利用したのはどれですか？

5 = 5
= 4+1
= 3+2
= 3+1+1
= 2+2+1
= 2+1+1+1
= 1+1+1+1+1

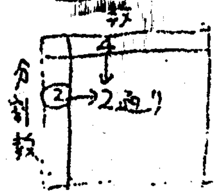
次の表は，[数と分割数]を調べた表です。

分割数＼数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
①	1	1	1	1	1	1	1	1	1			
②		1	1	2	2	3	3	4	4			
③			1	1	2	3	4	5	7			
④				1	1	2	3	5	6			
⑤					1	1	2	3	5			
⑥						1	1	2	3			
⑦							1	1	2			
⑧								1	1			
⑨									1			
⑩												
⑪												
⑫												
計	1	2	3	5	7	11	15	22	30			

[表の見方]

4 = 4 ①
= 3+1 ②
= 2+2 ②
= 2+1+1 ③
= 1+1+1+1 ④

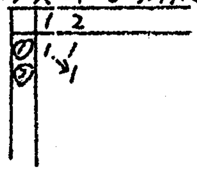
②は4を2組の数に分割しており，3+1と2+2の2通りである。



この表で原理[1]，[2]はどう表わせるだろうか？

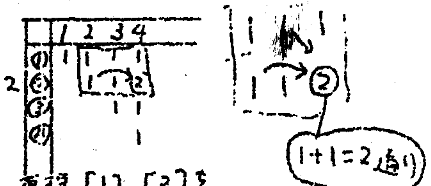
[1]. 末尾に1加えると，分割数は1つ増え，数も1増えるから，上の表では，斜め下向きの ↘ という矢印で対応付けられる。

例. $1=1 \xrightarrow{[1]} 2=1+1$ ⇔



[2]. すべてに1加えると，分割数は変わりなく，数は分割数分だけ増すから，横向きの ⟶ という矢印で対応付けられる。

例. $2=1+1 \xrightarrow{[2]} 4=2+2$



問3. 上の数と分割数を記入した表に，原理[1]，[2]を意味する矢印を記入しなさい。

問4、原理[1],[2]を利用して、数と分割数を示した表の
数 10, 11, 12 の空欄部分をうめなさい。

11=

問5, 数10 と 11 を自然数の和で実際表わし，問4で
原理[1],[2]を利用してうめた空欄部分が正しいかどうか
調べなさい。(前に配ったプリントの1〜9までの場合を利用して考えてもよい。)

10=

以上のように考えてくると、原理[1]と[2]だけを利用すれば、100の分割が全体で何通りあるかを知ることも可能である。特に[数と分割数]を示す表を利用して、個数を調べるとよい。

〈ふりかえってみると：反省〉

最初の授業で、問題を見たときは、皆簡単だと思ったのではあるまいか。ところが8,9,10ぐらいを実際に書き出すのは、たいへんであったはずだ。原理[1],[2]を発見した後はどうであったろう。原理を利用すると簡単になったのではないだろうか？

数学では
[① 規則を探る。(原理や法則を見い出す)
② 規則を利用する。(原理や法則を利用する)]

という2つのことは、大切である。

規則や原理・法則を発見するのには「見方を変える」ことが重要である。例えば、どのクラスでも「末尾に1加える」という原理は容易に発見できたが、「すべてに1加える」という発想はなかなか生まれなかった。理由は「末尾に1加えた場合」というように「末尾」にこだわったためではないだろうか？「末尾」でなかったらという「見方を変える」ことができれば、もっと早く発見できたのではないだろうか？

「見方を変える」には「〜でなければどうなるだろう」と考えてみるとよい。例えば、「末尾でなければどうなるか？」というように。また、表を作ってみること、表現の仕方を変えるのも有効である。例えば、最初に君たちの中から次の表ができた。

数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
通り	1	2	3	5	7	11	15	22	30	…

この表で、考えたがうまくいかなかった。「この表でなければどうか」と考えれば、No.1の「数と分割数」の表が思いうかぶであろう。「数と分割数」の表を分析したからこそ原理[1],[2]が発見できたのである。

〈新たな課題：連休明け5月11日にレポート提出〉

課題1、次の表は、数と先頭数の個数を調べた表である。この表を見ると、No.1の「数と分割数」と同じ表であることがわかる。どうして同じような表ができるのだろう。次の表はどういう原理でできているか考えてみよう。

〈数と先頭数〉

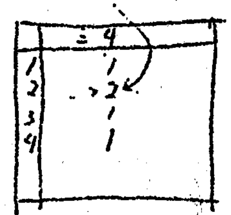
先頭数＼数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1	1	2	2	3	3	4	4
3			1	1	2	3	4	5	7
4				1	1	2	3	5	6
5					1	1	2	3	5
6						1	1	2	3
7							1	1	2
8								1	1
9									1
合計	1	2	3	5	7	11	15	22	30

表の見方

$$4 = \boxed{4}$$
$$= 3 + 1$$
$$= 2 + 2$$
$$= 2 + 1 + 1$$
$$= 1 + 1 + 1 + 1$$

2は2つある

↑ 先頭数



課題2、新たに気づいたこと、発見したことについて、どうしてそうなるかを調べてみよう。

「数と分割数」を表す表と、「数と先頭数」を表す表とが同じものになるのは、どうしてなのか。

1年 B組

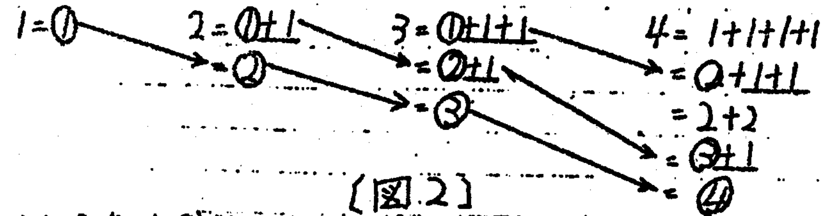
4/23

③

数と先頭数

先頭数＼数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1	1	2	2	3	3	4	4
3			1	1	2	3	4	5	7
4				1	1	2	3	5	6
5					1	1	2	3	5
6						1	1	2	3
7							1	1	2
8								1	1
9									1

（図1）



〔図2〕

(1) 3を自然数の和で表した 2+1 と 4を自然数の和で表した3+1の 2つの式を比べてみる。2+1を㋐ 3+1を㋑とすると、㋐の先頭数より ㋑の先頭数の方が1大きい。そして、先頭数以外の数は変わっていない。そこで、このように、先頭数に1を加え、その他が変わっていない式を矢印で結んでみる。このような作業をしてみると、ある数の前の数の和を表した式はすべて先頭数に1を加えると、ある数の和を表した式になることがわかる。そして、前の数の和を表した式の先頭数に1を加えて作られた式以外の式(1+1, 1+1+1, 2+2, 1+1+1+1 など)の数だけ、前の数の和を表す式の個数よりふえていることがわかる。

「先頭数に1を加えて式を作る」時に、できた式などこからきているのかを〔図1〕に書き込むと↘という矢印で示される。ここでは、下の〔図3〕のA,Bが等しいところだけに↘を書き込んだ。そして等しくないところに↘を書き込んだ。

A↘B

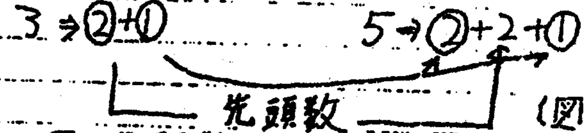
〔図3〕

AとBが等しくない時は、どのような事がなりたっているのだろうか。

(2) (1)にはあてはまらない 1+1, 1+1+1, 1+1+1+1, 2+2などには、どのような関係があるのだろうか。(1)にあてはまらない式を少し書き出してみる。

2=1+1　3=1+1+1　4=1+1+1+1　5=1+1+1+1+1
　　　　　　　　=2+2　　　　=2+2+1

この式を見比べてみると、次のような事がわかった。
※1つの式に同じ数が2回以上含まれている。
※1つの式に何回もでてくる数は、その数の中で1番大きい数(先頭数)である。
このようなことから、ある数の和を表す式に、その式の先頭数を1つ加えられてつくられた式が上記の式だと分かった。



〔図4〕

同じ先頭数をたすから、その式の先頭数は変わらない。そして、もとの式よりも先頭数だけふえた。したがってどこの式をもとにして作ったかを ⌒→ で〔図1〕に書いた。すると下の図のようなきまりがあった。

〔図5〕

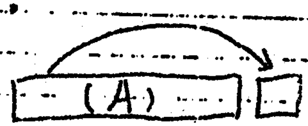
表の共通

「数と先頭数」の表にも矢印を入れていくと、「数と分割数」の表と同じように矢印がひけた。しかし、矢印の意味はちがった。

	数と先頭数	数と分割数
↘(↘) ——	先頭数を1大きくする。	末尾に+1をつける。
⌒→ ——	もとの式の先頭数を加える。	すべてに1を加える。

↘↘は意味はちがっても機械的に、矢印の上の数を矢印の先にもってくる※1 という ことでは同じである。しかし、⌒→では機械的に行うやり方はちがう。「数と先頭数」では先頭数分が、「数と分割数」では分割数分が、下の図の(A)に入るからだ。

※1 次のページ



しかし、上から 5段めの 先頭数は5、分割数は3 ※2
上から 2段めの 先頭数は2、分割数は2
というように、上から何段めかが先頭数、分割数といっちしているから、結局は、同じことである。
したがって矢印はどちらの表でも同じになっている。
つまり、意味はちがっても表のつくり方(いちいち式を書いていくのではなく、表にうまっている数からつくる)は同じである。だから、2つの表は同じ表になる。

④

※1 もしも、そこに、緑の矢印もきていたら、赤矢印のもとと、緑矢印のもとをたしたものを書き入れる。もしも、緑の矢印がきていなかったら、青矢印の元の数を入れる。

※2 ここでは、たてじくにあるめもりのことを表す。

Very Good

No.
Date

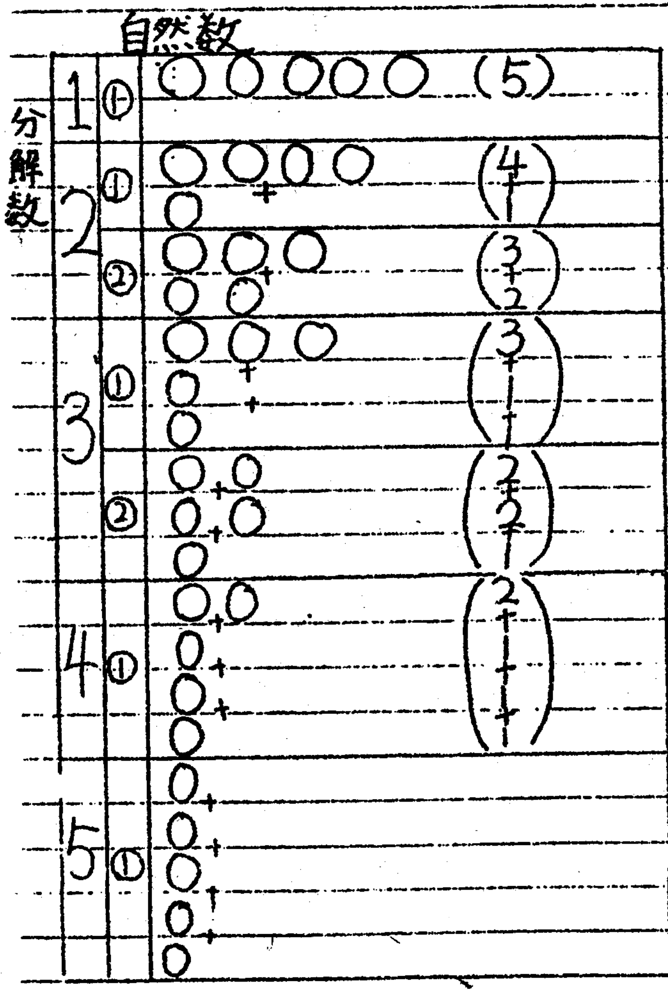
なぜ分割数の表と
先頭数の表が同じか

1年B組　番

Very good.

No. 1
Date

5の場合　（1を○とする）



次に上の図をたてとよこの軸を逆にする。
すると次のページの図になる。

No. 2

Date

分割数(前のときのもの)

分割数(前)	1	2	2	3	3	4	5
ナンバー	①	①	②	①	②	①	①
先頭数	○+○+○+○+○	○○+○+○+○	○○+○○+○	○○○+○+○	○○○+○○	○○○○+○	○○○○○
から先頭数は	1	2	2	3	3	4	5
	1+1+1+1+1	2+1+1+1	2+2+1	3+1+1	3+2	4+1	5

先頭数はもとのもの(例えば4+1の4)ではなく たてとよこを逆にした時のもので、あらためて考えればよい。

例えば

たてよこを逆にする

分割数が② ○○○○+○ (4+1) ⇒ ○○+○+○+○ (②+1+1+1) 先頭数

No. 3

Date

⑤

つまり、よことたての軸を逆にすることは、分解数を先頭数にもってきたことと同じになる。

だから分割数＝先頭数は成り立つ