礒田正美, “関数の思考水準と表現世界の再構成過程に関する研究～こどもの面接調査を通して～”

概要

関数の学習による関数及び関数の考えの変容を記述するのが研究の目的である。これまで、関数の思考水準によりその変容を記述してきた。今回の報告は、その水準を、関数及び関数の考え方の表現世界の変容としてより詳細に記述することが目標である。具体的には、表現世界の記述枠組みを設定し、こどもの面接調査を通して、表現世界の構成とその再構成過程を記述することを課題とする。本課題の数学教育上の位置は、S.Wagner、C.Kieran による An agenda for Research on the Learning and Teaching of Algebra によれば、次のように記述される。Research of Algebra において、本課題は「代数における特定の概念/過程（例えば、変数、関数、多項式、方程式など）に関連した理解の水準とは何か？」に対する研究と位置付けられ、「a.そういった水準をどのような方法で特徴付ける、さもなくば、定義するか？（例えば、直感的、操作的、関係的、形式的など）」という課題に対して、思考水準と知識表現によって理解の水準を記述しようとするものである。そして「b.以下に関して、認知的な階層はあるか？：～表現のスキーマのタイプ、そして～例えば、離散対連続（関数）、もしくは1変数対2変数（方程式）というような、他の特色」について、今回の報告では特に知識表現のモデルを階層化し、知識構造（スキーマ）の特徴を明らかにすることを課題とする。さらに、「c.理解のある水準から他の水準への移行によこたわるメカニズムは何か？」については、数学化の意味世界再構成過程の枠組みから、メカニズムの一端を解説可能な範囲で言及する。

数学の活用力育成への知識論的接近

—数学的モデル化と思考水準，知識転移をめぐって—

磯田　正美

はじめに

国際的にみて計算力に秀でた日本の子供が，応用力に劣ると指摘される。一方で，今世紀初頭の数学教育改良運動以来，「応用される数学を教えるべき，数学は応用できるように教えられるべき」といった主張は，世界的規模で歴史的に検討されてきた。そして，数学科教師は，生徒からの「何のために数学を学ぶのか」という問いに，答えることを迫られている。

一般に数学の活用（応用）には，2つの場合が考えられる。一つは，新たな数学の創造（もしくは学習；以下同様）に際しての活用であり，一つは，事象に対する活用[1]である。本論は，上記の問題に答えるべく，数学の事象への活用力を育てる学習指導の構想を目的として，中学，高校の数学教育を念頭に，次の三つの課題を考察する。

課題1　従来の応用と称する指導の多くは，実際の事象への活用過程とは異質な過程で指導されていることを指摘する。

課題2　適切な学習指導を組まない限り，数学の活用力の伸張は期待できないことを指摘する。

課題3　数学の活用力を育てる学習指導の在り方を考察し，学習指導の構想に必要な教授方略を提案する。

課題の考察では，従来からこの主題へのアプローチに援用されてきた数学的モデル化過程論（プロセス論）に加え，学習者の持つ知識の性格の側から，数学教育学上の思考水準論，心理学上の知識転移論を援用し，知識論的アプローチを展開する。

I　数学の活用過程と従来の授業過程

ここでは，課題1に関わって，従来の応用と称する授業過程の多くは，事象への活用を扱う内容になっていないことを指摘する。

1．数学の活用過程

事象に対する数学の活用過程は，数学的モデル化過程として知られている。三輪辰郎氏は，数学的モデル化過程を次のように示している[2)]（図1）。

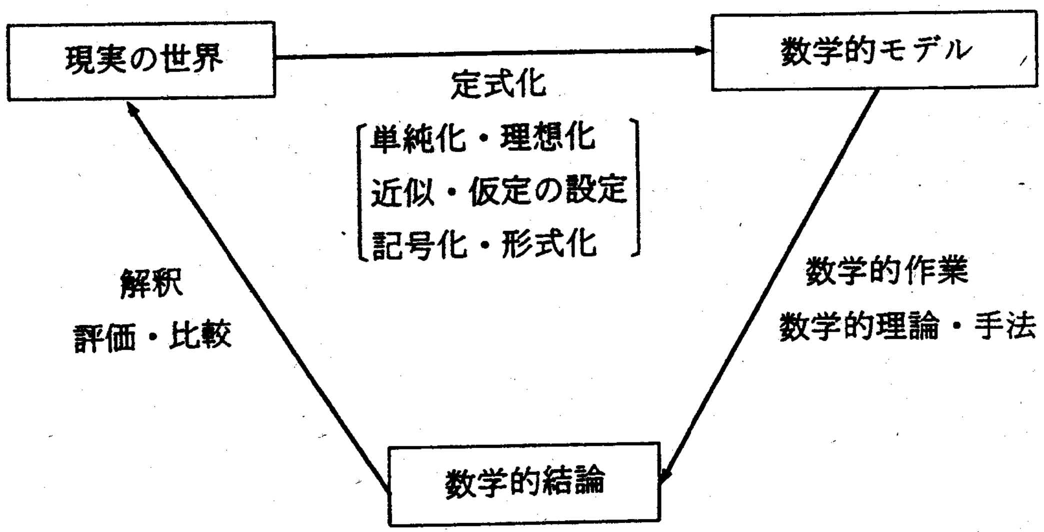


図1　数学的モデル化過程

この過程を，諸科学における数学活用例として虹の説明を例に解説しよう[3)]。

虹ができるメカニズムは，プリズムから連想すれば，光の波長に応じた屈折率の違いと想像できる。しかし，具体的には，観察者からみて，どの方向に，どのような位置関係で見えるのであろう（図2）。

これが，現実世界（事象）における問題状況である。事象において解決するのであれば，実測すればよい。では，数学的にその現象を説明することはできないであろうか。数学的に説明するには，例えば，次のような条件を仮定す

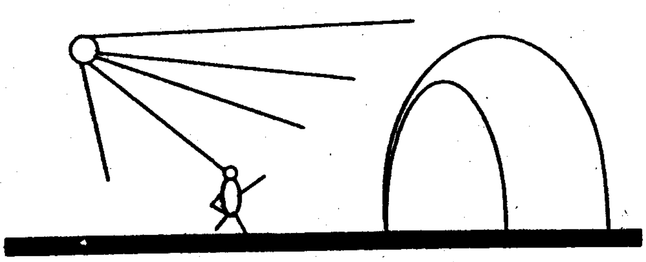


図2　虹の情景

る必要がある。

① 雨粒は球で，大きさは均一である。

② 雨粒は空間に一様に分布している。

③ 光の速度は，雨粒の運動を無視できる程，速い。

④ 太陽光線は，平行光線である。

⑤ 雨粒での光線の振舞いは，反射屈折の法則に従い，すべての雨粒の屈折率は等しい。

以上の条件は，いずれも問題状況を観察して仮定する性格のもので，このように考えてよいことが，予め保証されているわけではない。数学を活用できるようにするために，そうであるものと仮にみなすのである。数学を活用するとは，上記の仮説的条件に，数学の知識を当てはめ，演繹的に「〜とすれば…である」というように推論していくことに他ならない。

例えば，図2のような位置関係でみえるためには，光は雨粒で反射する必要がある。その反射にはどのような場合があるだろう。図3のように雨粒内で1回反射する場合が，まず考えられよう。

①，③，⑤を仮定し，屈折率を n とすれば，図2の入射光と反射光のなす角 θ は，初等幾何，三角関数を活用した角の計算から，入射角 i によって，$\theta = 2(2t - i)$；ただし，屈折角 $t = \sin^{-1}((\sin i)/n)$ と決ることがわかる。ここで図3は雨粒内での光の反射モデルであり，モデルから導かれた式は，数学的推論から得た結果である（物理学では，この結果をモデルとみる場合も多い）。この結果を，事象へ解釈すれば，入射光と反射光のなす角 θ は，雨粒の大きさには関係ないことが示唆される。このことからすれば，雨粒の大きさは均一である必要

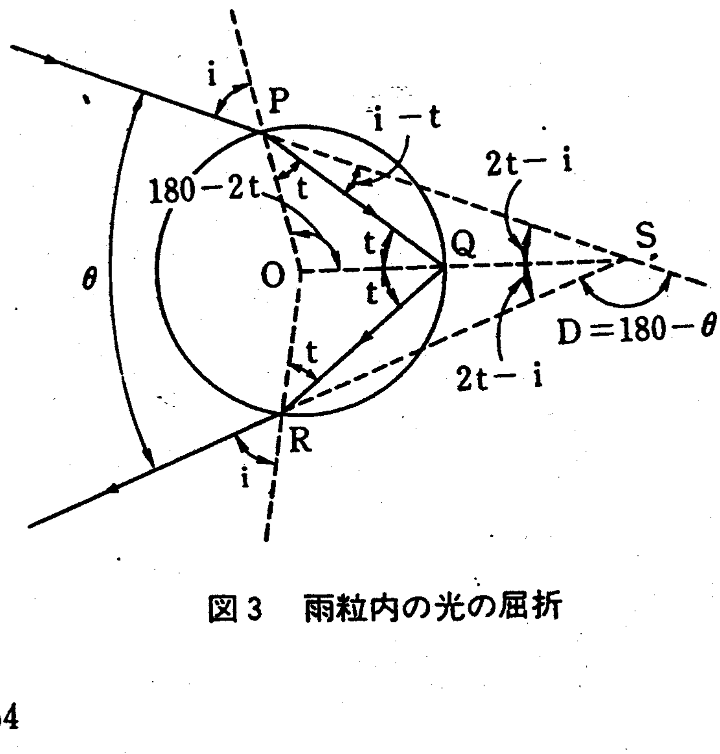


図3 雨粒内の光の屈折

はないことがわかる。観察結果でも，雨粒の大きさは均一ではないので，条件①は変更される。(以下省略)

このようにモデル化過程では，条件を基にモデルを得て，モデル上で数学的に推論し，得られた結論を事象へ解釈し，観察結果と比較対照する。そして，事象に適するよう条件を加えたり廃棄したりして，モデルを再構成していくというように先の三輪氏による図式をサイクリックに繰返していくことになる。そして，現象（事象）をより適確に表現しようとすれば，このサイクルは尽きることなく繰返されていく。

2．従来の学習指導の問題

前述の数学的モデル化過程と従来の学習指導，例えば教科書で応用と称する指導，を比較すると，従来の応用と称する指導は，多くの場合次のような点を欠いていることが指摘される[4]。

① 事象における問題状況が不明であり，事象における探究の必然がないままに，問題が提示されている。

② 問題文には，最初から条件が過不足なく明示されており，意識的に条件を仮説設定する機会がない。

③ 多くの場合，単元の後半にあり，活用すべき数学がわかるようになっている。

④ 得られた結果を，事象へ解釈して，条件を修正する機会がない。

このように指摘されても，なお，事象への活用力を指導していると考える先生方もおられよう。しかし，実際にはそれも疑わしい場合があると想像できる。

例えば，中学校の関数の導入場面では，事象から関数を抽出するために，次のような図を伴った水槽の傾け場面から始めることがある(図４)。そこで教師は，事象から伴って変る二変量を抽出し，それを関数として定式化することを意図しており，そのように指導することで活用力が育つと予想している。果たして，生徒はその過程を期待通り歩むであろうか。

それを調べる為に，筆者は，図のかわりに実際の映像で示した場合と，図による場合の生徒の意識内容の差を比較してみた[5]。その結果，図による場合は，伴って変る二変量を意識することなく，ただ単に図上の左右の目盛りを読んで，和が10と定式化する傾向が顕著であった。それに対して，映像による場合は伴

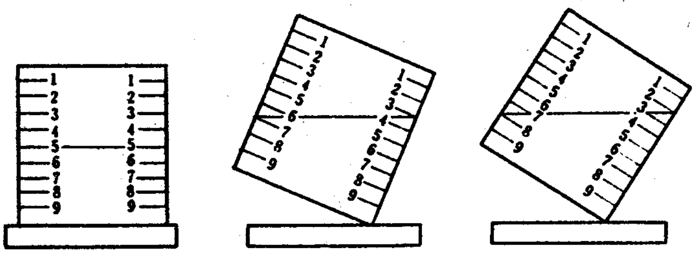


図４　立方体傾け図

って変る状態を意識してから変量抽出，定式化に至る傾向が顕著であり，図をかいて考える姿も認められた。教師の側からすれば，表面的には，図でも映像でも，その事象に対して有効な式が得られ，期待通り事象を数学的に処理する授業を実践したかに見える。しかし，この結果からすれば，図から始めた場合，教師の期待した意図が実現されているかどうかは極めて疑わしいのである。すなわち，教科書に示された図ではじめる学習指導の場合，そこで進められる生徒の思考活動は，本来の数学活用で進められる過程とはかなり異なる様相で展開されていることが推察される。

このように考えると，先生方が応用と考える教科書上の従来の教材が，実際には，数学を活用する過程である数字的モデル化過程とは異なる過程で扱われ，しかもそれとは異なる学習内容を扱っている実態が，推察される。

II　知識の転移からみた活用の困難性

前述のような実態は，既習事項を前提に能率的に学習を展開しようとする数学学習では，必然的に起こりえる問題と言える。そこで学ぶ知識は，事象へそのまま活用できる性格のものではないのである。ここでは，課題２に関わって，このような数学的知識の性格を確認し，事象での数学活用を意図した学習指導の必要を提起したい。

1．数学的知識の階層性

事象を対象に数学を創りだすことをめざす小学校と違い，中学高校では，基本的には既習の算数・数学を基に，より高次の数学を創りだすことを意図する。このような数学的知識の階層性（抽象の階層）が，数学の知識の事象への活用を容易ならざるものとしていくと考えられる。数学的知識の階層性を端的に示したのは，van Hieleによる思考水準論である[6]。以下では，van Hieleの主張を基に筆者が研究を進める関数の思考水準(学習段階)を例に，事象への活用に際しての算数的知識と数学的知識の性格の違いとその階層性を問題にしていこう。

筆者の研究[7]によれば，関数の思考水準は，微分積分をめざす高校までの学校数学に限れば，次の4つの水準からなると言える（詳しくは注参照）。

第0水準：事象（対象）を，数量間の関係，事象間の依存関係（研究方法）で，考察できる。

第1水準：数量間の関係（対象）を，変化や対応の規則（研究方法）で，考察できる。

第2水準：変化や対応の規則（対象）を，関数の式やグラフ（研究方法）で，考察できる。

第3水準：関数の式グラフ（対象）を，他の関数（導関数・原始関数；研究方法）で考察できる。

第0水準，第1水準は，小学校で学ぶ関数の考えに関わるもので，事象を念頭に考察を進める。例えば，小6（第1水準）では，表，式，グラフ等で，複数事象が共通にもつ特徴として比例の性質を扱う。第2水準は，中学から高校1年にかけての関数の学習によるもので，一次関数，二次関数が典型であり，関数としての式や表，グラフの特徴をそれぞれに扱う。第3水準は，高校の微分積分の学習によるもので，例えば微分すれば，未知のn次関数の特徴を既知の（n－1）次関数から知ることなどを扱う。

思考水準論では，次水準への移行のための学習活動は，「下位水準の研究方法を対象化すること」によって進行するものとして位置付けられる。すなわち，中学校では，小学校で学んだ第1水準の研究方法である変化や対応の規則――例えば比例――を対象化して，関数を導入する。そして，高校では，高1まで学んだ関数の式やグラフ（第2水準）を考察の対象として，微分積分を導入するのである。思考水準論によれば，各水準では異なる言葉（言語）が用いられ，各水準に固有な探究の文脈が備えられていると考えられる。例えば，第1水準は，比例のような事象の関係を記述する言葉を備えており，基本的には，事象に共通な関係（例えば比例）の性質（特徴）を探り活用しようとする文脈に立つ。そして，第2水準は関数の式，グラフ等を相互に翻訳，表現するための言葉を備えており，その言葉による思考活動では，関数の特徴を調べようとする文脈に立つのである。そして，第1水準から第2水準への移行をめざす中学校では，事象の関係を探る文脈から関数を探る文脈への探究の文脈の転換や，事

象の関係を語る言葉からそれぞれの関数の特徴を語る言葉への使用言語の再構成をめざした学習指導が繰り返される。

このように水準に応じて異なる研究対象や方法，そして探究の文脈，使用言語が存在することは，各水準での考察が結果的に各水準に固有な数学理論をもたらすことを暗示している。例えば，諸事象が比例する事象か否かを判別するのは，第１水準の理論に基づく典型的な活動とみることができる。また，与えられた表が，いかなる関数か判別する為にグラフをかくことは，第２水準の理論による典型的な活動とみることができる。思考水準論は，数学の知識の階層性を，このような各水準に固有な研究（学習）対象・方法，言語，文脈，理論の層として示すのである。

２．活用の困難性の心理学的説明

前述の様な数学の知識の階層性を基にすれば，中学校以降の数学の知識がそのまま事象へ活用できる性格のものでないことがより明確になる。その活用の困難性を説明するために，最近の心理学の結果を利用しよう。数学的知識の活用は，心理学的には知識転移の問題とみなすことができるので，以下では最近の心理学における知識論，転移論を援用していく。

認知心理学では，知識はそれを活用する領域や文脈に依存して蓄えられていると考えるのが通常である。すなわち，思考は文脈に依存して展開されるものであり，そこで働く知識も，その文脈に依存して獲得され，その文脈が属する領域に固有に使われるもので，異なる領域では容易に使える――すなわち転移する――性格のものではないというのである。川村久美子氏は，このような立場から知識活用の問題を次のように論じている[8]。

「知識の領域固有性の議論を推し進めると，知識は特定領域にしか使えない固定的なものと考えることになるが，それでは新しい領域の問題に直面したとき，われわれはどのようにも振舞えなくなる。そうすると，知識が極端な一般性を持つという（J.Piajetの；引用者注）仮説は棄却するとしても，知識がそれぞれの領域に完全に閉じこめられていると考えるのは妥当ではないと思われる。そこで知識転移の問題が現われる。ここでは知識を理論として位置付けたので，知識転移の問題は理論間の関係の問題，特に新しい領域の知識を獲得するときの既存の理論と新しい理論との関係の問題を含むものといえる」

川村氏の論によれば，理論間の関係が適切に作られている場合に限って，ある理論の知識は，他の理論へ転移しえる，すなわち活用されえるようになると考えられる。さて，数学学習の場合では，理論間の関係は適切に作られいると言えるだろうか。前述の思考水準論によれば，理論間の関係は，異なる水準間の関係とみなすことができるので，関数の水準を再度取り上げて，考察を進めよう。

中１の関数単元「伴って変る量→関数の定義→比例」を例にしよう。そこでは，事象には，伴って変る二量（比例も含む）があることを扱った後，それを関数として定義する。そして，小６で学んだ比例を，変域等の拡張も含めて，関数としての比例に改めていく。すなわち，第１水準の事象における比例を対象に，第２水準の関数としての比例を学習していく。その場合，事象への比例の活用力は高まるであろうか。筆者の調査によれば，中１より小６の方が，事象への比例の活用力が高い。逆に言えば，中１で関数としての比例を学ぶことで，事象への比例の活用力を失う生徒が顕著に多いことがわかっている[9]。中１の生徒は，表へ比例関係を適用でき，事象を比例と意識したのであるが，その事象へ比例関係を適用することはできなくなっていたのである。

この調査結果は，事象における比例という第１水準の理論（小６まで）が，関数としての比例という第２水準の理論（高１で達成）へと再構成されるに際して，事象が抜け落ちていく現象を示唆している。そこには様々な要因が考えられるが，表式グラフという関数の（第２水準の）表現言語の指導にこだわる中学校と，事象から数理を抽出し，事象へ活用することに専念する小学校の指導（第１水準）とのギャップとみることもできる。小学校で，事象から法則性を把握する重要な言葉である表は，第２水準でも関数の数値変化を知る為に活用される。それゆえ，表での比例は処理できるのであるが，事象での比例の知識は中学校での第２水準への移行の際に抜け落ちてしまうと考えられるのである（図５）。

このような数学の知識の活用の困難性は，思考水準の移行の立場からみれば，図５の様に図式化して示すことができる。この図式では，第０水準を，事象を対象とする思考活動とみなしている。先に述べたように隣接する水準間では，水準の移行のための学習指導（↑印）によって，既存の水準の言語(理論）は新

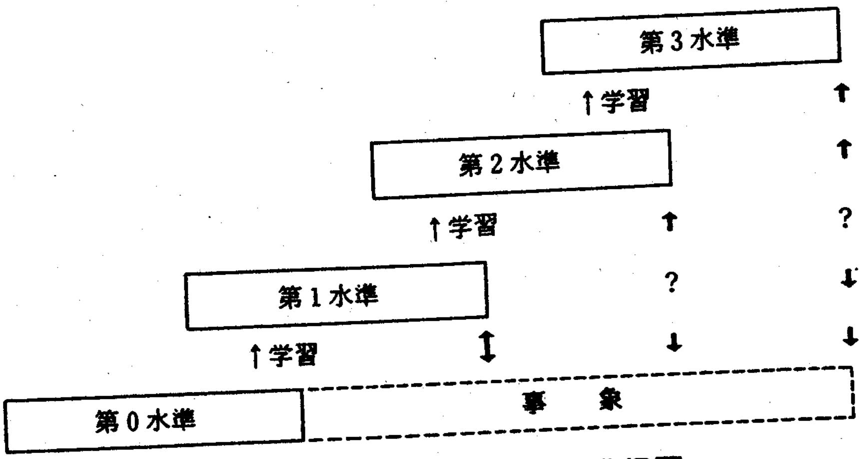


図5　思考水準と階層的学習進行図

しい水準の言語（理論）へと再構成される。その際，前述した，事象における比例の場合のように新水準に適切に組込まれることなく，取り残される知識がある。その再構成で，事象との関係（↕印）が自然に保証されるのは，事象（第0水準）から作り上げられる第1水準のみである。第2水準以降の場合は，事象に関する知識を含んだ下位水準の知識は，当該水準の内容に応じて再構成されない限り，事象における比例の知識の様に，どんどん抜け落ちていくと考えられる（図5の？部分）。

前述したように，知識は領域に固有な形で，そこでの探究の文脈に依存して活用され，それ以外の領域に容易に活用しえるものではない。水準の移行に際して，このように事象にかかわる知識が抜け落ちていく事態があるとすれば，事象で高位水準の知識が活用できない事態は必然と言えよう。数学の知識を事象へ活用可能なものとするには，図5の？部を改めて指導し，事象と数学の知識の関係を改めて適切に再構築する必要があると言える。

III　事象への活用力を育てる教授方略

ここでは，前章の結論を受けて課題3に関わって，事象と数学の知識の関係を再構築する際に，すなわち事象への活用力を育てる際に，参考にしえる教授方略を提案していく。

1．活用力を育てるための基本テーゼ

ここでは，最近の心理学の転移論の話題から，「アナロジー」と「目的の発見」を取り上げ，事象への活用力を育てる為に――知識転移を促す為に――なすべき事柄を提案しよう。

先に引用した川村氏は，異種理論間の転移，特に新しい理論を組み立てていく過程において，アナロジーが注目されていることを次のように指摘している。

「われわれは新しい領域が過去に獲得してきた領域のメカニズムとどこかで類似していることをヒントに新しい領域を理解していこうとする。新しい知識は既存の知識に関連づけたかたちで獲得されていくのである。(中略)アナロジーとは過去に行なった類似の問題を思い起し，あるいはよくわかっている類似した領域の現象を思い起し，それを新しい領域に当てはめて，新しい領域の理解に役立てることである。(下線傍点引用者)」

先の虹の例では，虹という未解明な現象（新領域）に対して，光反射の幾何学的把握（図３）をすることで，初等幾何学の角の問題（過去の類似問題，領域）等が連想され(思い起され)，それがアナロジーとして働いて，虹という物理現象の数学的理解が深まる訳である。こういったアナロジーでは，積極的に数学を活用しようとする態度が重要になる。実際，物理学では，現象を数学的に処理することで現象を理解するというアナロジーは，すでに自然な研究態度であり，ガリレオ以来の研究方法となっている。そこでは，モデル化過程で述べたような「～とみなす」というような仮説的条件設定と，それをふまえた「～とすれば…である」というような仮説演繹型推論がなされるわけである。その際，活用する数学的知識が想起される。そこでは，過去に行なった現象の数学的処理法を思い起すことや，関係しそうな数学を連想すること，言い換えれば類推すること，そしてそうしようとする態度が重要な役割を担うと考えられる。こう考えると，事象へ数学を活用する上では，特に次のテーゼが重要に思えるのである。

〈基本テーゼ１〉　事象（現象）から関係する数学を類推し，類推した数学が使える形に仮説的に条件設定し，仮説演繹型推論により考察して，結果を事象へ解釈していくこと
〈基本テーゼ２〉　事象から数学を類推し活用しようとする態度にあること

一方で，川村氏が提案するアナロジーは，水準の移行では，普通に行なわれている学習活動とみなすことができる。実際，第１水準への移行で，事象のもつ関係の一般概念として比例を学習する際（新領域）には，第０水準での比例

事象の考察，例えば「買う個数を増やせば合計金額が増える」というような考察（過去の領域）が，アナロジーとして非常に役立っている。問題なのは，先に指摘したように，第２水準以後の学習では，事象とのこのようなアナロジーを展開する機会が乏しい点にある。

従来の学習指導では，このような事象と数学間のアナロジーは，抽象的な数学の概念を平易に理解する意図でなされてきた。例えば，一次関数の傾きの説明に階段を用いる等は，第２水準の知識を理解する為に事象をアナロジーとして使った例である。しかし，注意すべきは，それはあくまで数学を理解する意図でなされてきたものであって，現象を数学的に理解する意図でなされてきたものではない点である。このような意図の違いが，知識転移成立の障害になることを示したのが，次に述べる「目的の発見」という考え方である。

三宅なおみ氏は，D.Newmanの研究から，「目的の発見」を次の様に述べている[10)]。

「ニューマンらは，まず，『課題』を再定義する。課題とは，従来考えられてきたように『目的があって，ある条件が与えられていて，その条件を守りつつ，目的に至る道をみつけるもの』ではなく，その目的自身発見されなければならないものだ，とする。生徒が学んでいないように見えるとき，教師の目的と生徒の目的がずれている，ということはありそうなことである。(中略)ニューマンたちにとって，転移はそのような『目的』の発見である。(中略) 教師は，ある目的を持って子どもとの共同作業にはいる。教師はまた，その作業を通して子どもに伝えたい知識，技能について，『この場』だけでなく，『別の』場面でも使えるようになってほしいと思っている。そこで学習者が，初めの教師との共同作業の中で，教師の『目的』をじょうずに発見できれば，将来，教師がひそかに意図している『異なった』場面でも，自発的に同じ目的を同定する，とういうことが起きるかも知れない。そうすれば，それは転移である。」

三宅氏の論からすれば，教師が，学習指導場面で，事象へ活用できるようになることを願っており，生徒が自発的にその意図(目的)を発見できれば，後々の活用が期待できる。前述した水槽の傾けの例を思い起されたい。教師の「変量抽出からの関数導入」という意図は，図による提示では見事に裏切られ，生徒は「目盛」に着目してしまう。意図が発見できないがゆえに，後々の活用は

期待できないのである。さらに，そこで，教師が関数概念の理解のみを意図して，事象への活用を意図していないとすれば，なおさら後々の事象への活用は期待できないと考えられる。

生徒が自発的に教師の意図を発見できる場でなければ転移が期待できないとすれば，自発的に数学を活用したくなるという自然な目的を抱かす場こそが重要となる。このような考え方は，数学教育学で言えば，より本来的，本質的な数学的活動を進めるための場を用意せよという論に結びつく。知識の関係を適切に作るには，そこで本質的な数学的活動を進める必要があるという考え方である。事象への活用の場合に限れば，数学的モデル化活動を生徒が自発的に実際に進める場を用意しなければ，活用できるようにならないという論になる。このように考えると，次のテーゼが重要に思えるのである。

〈基本テーゼ3〉　事象を探究する目的を生徒自身が意識する場からはじめること

以上三つのテーゼを提示したが，これらのテーゼは，見方をかえれば，前述した数学的モデル化活動の実現を支援しようとするテーゼに他ならない。心理学では，このような本質活動から学習を展開する技法として，最近，認知的徒弟制(Collins等)という教授技法が提案されている。その技法をJ.S.Brown等は次の様に示している[11]。

「(認知的徒弟制とは) 職人の見習い修業において顕著な (そして顕著にうまくいっている) やり方に類似した方法を用いて，真正の活動と社会的相互作用を通じて生徒たちを真正の実践に文化適応させようとする試みである。(中略)認知的徒弟制は，持続的な真正の活動を通じで緊密に織り上げられた概念を発達させる試みである。(中略)このパラダイムでは，教師や指導者はまず生徒たちに向かって真正の活動での彼等の方略の手本を見せることで学習過程を促進する。それに続き，教師と同僚は生徒が一人で課題を遂行することを援助する。そして，最終的は，指導者はその生徒に教師から独立してそれを遂行し続ける権限を与えるのである。」(下線引用者)

この認知的徒弟制で提案されるような教授技法は，数学的モデル化過程自体

の指導段階という形態で，すでに池田敏和，山崎浩二氏による提案がなされている[12]。数学的モデル化過程自体の指導は取り組むべき課題であるが，一方で，数学の活用は特設の時間でのみ指導する性格のものではなく，日々の授業でも，活用に必要な諸能力の素地を育てる必要がある。そこで，次節では，日常の授業改善という視座から，活用力を育てる学習指導を支援する教授方略を提案していこう。

2．基本テーゼの実行を支援する教授方略

ここでは，前述の基本テーゼを基に，事象と数学の関係を適切に作り上げる為の教授方略例を提案しよう。課題は，日常事象と抽象的な数学とを適切に結びつけることにある。その結びつきは，基本的に抽象行為に関わる問題である。筆者は，その行為を「行為を振り返って抽象することによる『反省』」と「対象(具体）を数学（抽象）上の〜とみなすことによって抽象する『反映』」という二方略から記述してきた[13]。以下では，筆者の提案する「反省」「反映」という抽象の二面性を，基本テーゼの実現を支援する教授方略として例示しよう。

〈反省方略〉　日々の学習指導で，実際的場面を提示し，その場面から数学的考察が展開されるような問題状況を設定することからはじめよ。その問題状況とは，次のような要件を備えたものである[14]。

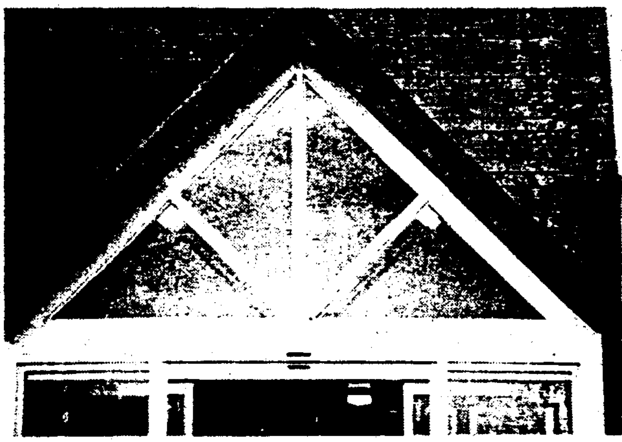
ア）　実際場面に対して特定の疑問や主体的行為を要求することから問題状況が沸き起こる。

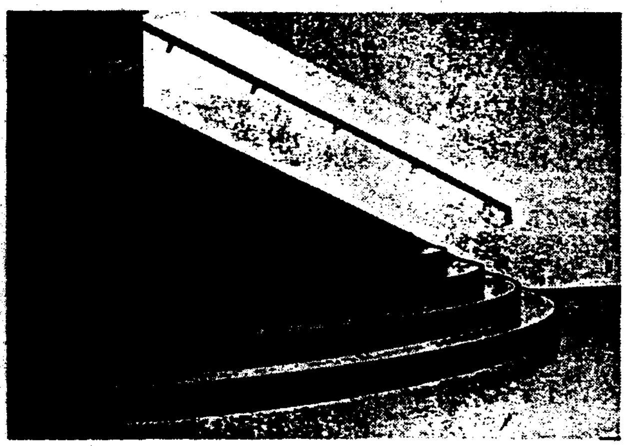
イ）　その行為を実行しようとすれば，それまでの既有の数学を振返り活用することに向う。

例1　実際場面として，下に掲げたような円形階段の写真を提示し，「段の端に滑り止めテープを張りたい。何m必要か」というように，張るという主体的行為を含んだ問題状況を設定する。

例2　新聞からマラソンの5㎞毎のラップタイムのデータを提示し，「仮に□㎞のレースだったら，順位はどうなるか」というように走るという主体的行為を含んだ問題状況を設定する。

例示したような実際場面からはじめ，仮想的ではあるが，生徒自身がその場





面での行為主体となりえる問題状況が設定されることで，生徒はテーゼ3で提案する主体的な事象探求という目的を持ちえよう。それぞれの問題状況は数学的処理の必要を潜在しているが，曖昧な問題状況ゆえに，それぞれの仮説的条件設定を通して数学を活用した考察を進め，結果を当初の問題状況の解消に用いるというテーゼ1が実現される。

〈反映方略〉　日々の授業で実際場面を取り上げる場合，その場面から連想される，その場面に関係しそうな，数学の内容や数学の問題を自由に上げさせよ。

例3　実際場面として，三角窓の写真を示す。写真をみて気付いたこと，関係しそうな数学や連想される数学の問題を自由に上げさせる。

テーゼ1で言う数学的モデル化過程では，場面に対して，数学が発想できなければならない。そして，その数学が使えるように場面を，数学上の～とみなさねばならない。写真は日常語で表わせば「三角窓」に過ぎない。直角二等辺三角形を連想して，「三角窓」を「直角二等辺三角形」とみなせば，合同や相似といった問題が意識できるのである。分度器と定規を写真にあてればわかるように，写真自体は「直角二等辺三角形」ではない。あえて「直角二等辺三角形」とみなすのである。このように「対象（場面，問題状況）を数学上の～とみなす」力の育成は，テーゼ2で言う態度の育成に結びつこう。

結び

本論では，主題に関わる三つの課題に対して，数学的モデル化，思考水準，知識転移という視点から考察を進めた。本稿の数学教育学上のオリジナリティーは，数学活用の困難性を，知識の領域固有性という心理学上のアイデアから，思考水準論及び転移論を利用して，知識論的説明を試みた点にある[15]。教育実践に対するオリジナリティーとしては，従来の応用指導の誤解を具体的に指摘し，潜在的に行なわれてきた教師の教授上のアイデアを，教授方略として提案した点にある。

事象への活用力育成においては，数学的モデル化の立場からの学習指導が期待されるが，その指導自体，また，その素地指導としても，我々がなすべき日日の授業改善の視点は，多々あると言える。その一視点としての提案が，知識論から得た三つの基本テーゼであり，その実現を支援する二つの教授方略である。それぞれの教授方略を利用した学習指導例については，本学の大久保和義，愛知教育大の飯島康之と筆者等による「場面から問題へ」（明治図書）に紹介したので参照されたい。

注及び参考文献

1）本論で批判する「応用」との混同を避けるために「活用」という言葉を用いた。

2）三輪辰郎「数学教育における数学的モデル化についての一考察」筑波数学教育研究 2 号1983　阿部裕氏は仮説検証型の活動として三輪氏のモデル化をとらえ，それが数学的活動一般に認められるとの考察を展開している。上越数学教育研究 5 ～ 7 号1990～1992

3）詳しくは磯田正美他編著（編集代表 吉田稔・飯島忠）「話題源数学」東京法令出版1990の磯田の解説を参照されたい。

4）ここまでの議論は，従来からある。例えば，磯田正美「問題解決を促す問題の開発に関する一考察」筑波数学教育研究 2 号1983　教科書の問題は，紙面の制約による部分も大きい。教師の授業構想力が求められるところである。

5）磯田正美「課題提示方法の違いによる思考過程の比較研究」北海道教育大学紀要（第 1 部C）第41巻第 1 号1990

6）P. M. van Hiele‘Structure and Insight’Academic Press 1986等，磯田の思考水準及び言語の再構成の考え方については，「数学化の立場からの学習指導に関する事例的研究」日本数学教育学会誌「数学教育」第72巻第 9 号1990及びその文献欄を参照されたい。

7）磯田正美「関数の思考水準とその指導に関する研究」日本数学教育学会誌「数学教育」

第69巻第3号1987,「関数の水準の思考水準としての同定と特徴付けに関する一考察」同学会誌「数学教育学論究」第70巻臨時増刊1988,「小中高にわたる関数の活用法及び表現法の発達と関数の水準」第22回数学教育論文発表会論文集1989,「関数の水準の移行過程における思考の様相に関する調査研究」第24回数学教育論文発表会論文集1991

8）川村久美子『知識の獲得』「概念と知識の発達」金子書房　1991

9）礒田正美「関数の活用の仕方と表現技能の発達に関する調査研究」日本数学教育学会誌「数学教育」第72巻第1号1990，比例の活用力は中3で回復する（再構成達成）。

10）三宅なおみ『知識獲得における文化的社会的制約』前出8

11）J. S. Brown, A. Collins, P. Duguid「状況的認知と学習の文化」（道又　爾訳）現代思想1991年6月，認知的徒弟制の主張の背景にA.H. Shoenfeldの論が例示されているように，このような主張は数学教育学では元来ある考え方である。本稿では，研究途上にある心理学上の論を無批判に根拠としたが，特に，ここでの「本質活動」論議は，心理学で参照した数学教育論を，再度数学教育学に還元するというトトロジーを含んでいる。

12）山崎浩二，池田敏和「中学校数学科における数学的モデリングの可能性に関する事例的研究」日本数学教育学会誌臨時増刊第73回総会特集号1991年（盛岡大会）

13）礒田正美・大久保和義・飯島康之編著「場面から問題へ」明治図書1992等参照，特に反省・反映と抽象の関連については，礒田正美「グルーピング方略からみた児童の数概念発達に関する調査研究」日本数学教育学会誌「算数教育」第74巻第2号参照

14）吉田稔氏の写真を利用した問題設定と，オープンエンドアプローチに発想している。平岡忠編「新しい中学校数学授業プラン3」大日本図書1989参照

15）例えば，飯田慎司氏は算数を含む日常語と数学語を区別し，数学的活動を図式化した(「数学教育学のパースペクティブ」聖文社1989)。本稿は，その区別を思考水準論から階層とみなし，知識と過程を分離して論じた。ただし，思考水準は，子供の思考というより教材の層としての性格が強い。ここでは，それを知識階層モデルとして類推的に活用したが，子供の思考においては，連続的性格もあわせもっている。