礒田正美, “関数領域のカリキュラム開発の課題と展望～テクノロジーによる探究学習と関数感覚の育成～”, 中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(6)数学科教育内容と指導法の開発研究～教育課程改訂動向とテクノロジー利用に関連して～, vol.6, pp.57-69, 1999, 筑波大学数学教育学研究室.

概要

小～高を見通した関数領域は、微積分に限定された用語関数が、他領域へ広まり、その考えが初等・中等教育に浸透する形で日本独自の性格を備えて成立しました。その浸透に際して、用語関数は教育用語「関数的見方考え方(以下考え)」へと拡張されました。図 1 は、その歴史的変遷を筆者なりに鳥瞰したものです。微積分早期導入を一つの目的に展開された改良運動では、関数は分科融合をはかる方策としても注目されました。そこでは広い意味で関数思想(観念)の涵養も謳われ、それは数学的な考え方強調の源流、関数の考えの強調の起源ともなりました。改良運動に失敗した米国では、今日なお、算術、代数、基礎解析、幾何、微積などの分科制が残っています。そして、テクノロジー利用時代の今日、米国は関数による融合と関数の考えの育成の重要性を再認して、過去 10 年、初等教育への関数の考えの浸透に努力しています。関数領域を成立・発展させた我が国の先人の偉業は画期的と言えます。図 1 は、過去 100 年に及ぶ先人の偉業に感謝し、「プラス」としてその展開を表しました。現実はそうなっているでしょうか。筆者自身は、関数が他領域に広まり浸透した結果、逆に関数を導入した当初強調された二つのねらい、融合と考え育成が不鮮明になったとみています。本論では、まずはじめに、関数に関わる表現の発達研究を基に関数領域の課題を指摘します。そして、課題解決策として、テクノロジーによる代数・幾何・微積 ForAll プロジェクトの成果を基に、探究アプローチによる内容・系統の再編と新目標「関数感覚の育成」を提案します。

参考文献

1)Randolph A. Philipp, William O. Martin, Glen W. Richgels, “Curricular Implications of Graphical Representations of Functions”, Edited by Thomas A. Romberg etal, “Integrating Research on the Graphical Representation of Functions”, pp.239-278, 1993, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

2)NCTM, “Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics”, National Council of Teachers of Mathematics, 1989, 邦訳, 能回伸彦, 清水静海, 吉川成夫監修, “21世紀への学校数学の創造”, 1997, 丸善(筑波出版会).

3)Masami Isoda, “The Development of Language about Function : An Application of Van Hiele’s Levels”, Edited by Luis Puig, Angel Gutierrez, Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol.3, pp.105-112, 1996.

4)礒田正美, 志水廣, 山中和人, “関数の活用の仕方と表現技能の発達に関する調査研究”, 日本数学教育学会誌節, vol.72, no.1, pp.2-17, 1990.

5)J. Clement, “The Concept of Variation and Misconceptions in Cartesian Graphing”, Focus on Learning Problems in Mathematics, vol.11, no.2, 1989.

6)礒田正美, “数学の活用力育成への認識論的接近”, 北海道教育大学教科教育学研究図書編集委員会編, “教科教育学の創造”, pp.62-78, 1992, 東京書籍.

7)礒田正美, “「ともなって変わる量はありますか」の成立をめぐって”, 中学校数学教育研究会誌(合併号), no.27-30, pp.14-19, 1992.

8)礒田正美, “曲線の表現史からみた代数、幾何、微積分の関連に関する一考察”, 筑波数学教育研究, vol.16, pp.1-16, 1997.

9)黒田稔, “数学教授の新思潮”, 1926, 培風館.

10)Michal Yerushalmy, Judah L. Schwartz, “Seizing the Opportunity to Make Algebra Mathematically and Pedagogically Interesting”, edited by Thomas A. Romberg etal, “Integrating Research on the Graphical Representation of Functions”, pp.41-68, 1993, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

11)”中学校・高等学校数学科教育課程開発の研究(1)～(5)(ForAllプロジェクトは現在も継続中である)”, 1994-1998, 筑波大学数学教育研究室.

12)佐伯昭彦, 礒田正美, 清水克彦編, “テクノロジーを活用した新しい数学教育～実験・観察アプローチを取り入れた数学授業の改善～”, 明治図書出版.

13)礒田正美、“van Hieleの水準の関数への適用の妥当性と有効性に関する一考察”, 筑波数学教育研究, no.10, pp.1-16, 1995.

14)Mutuko Sasaki, Tateaki Sasaki, “Mathematical Functions Can Generate Interesting and Attractive Patterns”, edited by Ogawa T. etal, “KATACHI Symmetry”, Springer-Verlag Tokyo, 1996.

15)Abraham Arcavi, “Symbol Sense”, For the Learning of Mathematics, vol.14, no.3, 1994.

16)Core-Plus Mathematics Project, “Functions and Algebraic Reasoning”, 1995.

17)礒田正美, “ともなって変わる量の認識とその指導”, 日本数学教育学会誌, vol.71, 総会特集号, pp.281, l989, 教育科学数学教育1989年11月臨時場刊で紹介されている。

18)宮川健, “テクノロジーによる関数関係理解の改善に関する一考察”, 日本数学教育学会誌, vol.80, no.1, pp.9-14, 1998.

資料　to appear(日本数学教育学会 Year Book 1998)

関数領域のカリキュラム開発の課題と展望
～テクノロジーによる探究学習と関数感覚の育成～

礒田正美

小～高を見通した関数領域は、微積分に限定された用語関数が、他領域へ広まり、その考えが初等・中等教育に浸透する形で日本独自の性格を備えて成立しました。その浸透に際して、用語関数は教育用語「関数的見方考え方（以下考え)」へと拡張されました。図1は、その歴史的変遷を筆者なりに鳥瞰したものです。微積分早期導入を一つの目的に展開された改良運動では、関数は分科融合をはかる方策としても注目されました。そこでは広い意味で関数思想（観念）の涵養も謳われ、それは数学的な考え方強調の源流、関数の考えの強調の起源ともなりました。

改良運動に失敗した米国[1]では、今日なお、算術、代数、基礎解析、幾何、微積などの分科制が残っています。そして、テクノロジー利用時代の今日、米国は関数による融合と関数の考えの育成の重要性を再認して、過去10年、初等教育への関数の考えの浸透に努力しています[2]。関数領域を成立・発展させた我が国の先人の偉業は画期的と言えます。

図1は、過去100年に及ぶ先人の偉業に感謝し、「プラス」としてその展開を表しました。現実はそうなっているでしょうか。筆者自身は、関数が他領域に広まり浸透した結果、逆に関数を導入した当初強調された二つのねらい、融合と考え育成が不鮮明になったとみています。

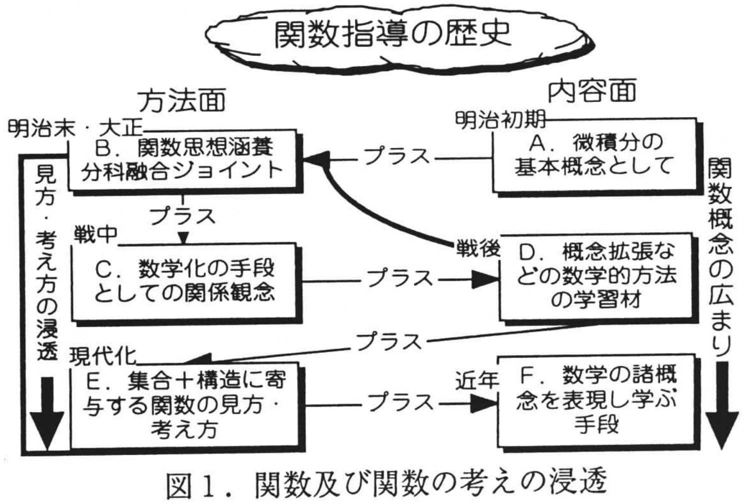


図１．関数及び関数の考えの浸透

本論では、まずはじめに、関数に関わる表現の発達研究を基に関数領域の課題を指摘します。そして、課題解決策として、テクノロジーによる代数・幾何・微積ForAllプロジェクトの成果を基に、探究アプローチによる内容・系統の再編と新目標「関数感覚の育成」を提案します。

１．関数の水準からみた関数領域の課題

関数（数量関係）領域の系統は、改定の都度変動します。その領域の課題を述べるには、普遍性のある一定の基準が必要になります。図２で模式化した関数の水準は、微積分を理解するに至るまでの、関数や関数の考えを表現する理論を階層として示したもので[3]、微積分を解するに至までに必要な発達課題も示唆しています。従って関数領域の課題を探る有効な視点と言えます。特に、ファンヒーレによれば、高位水準への移行をめざした学習指導では、一般に次の課題を指摘できます。

ア．水準間の通訳困難性：水準の違いは、言葉の違い、表現や語意、語用の違いを含みます。特に、異水準間には、同一用語でも意味が異なる語用が存在し、そこで当面する矛盾に、時に、学習者は混乱します。

イ．水準移行に伴う知識の再構成：水準の移行指導では、矛盾が起きないように語用を改めます。その際、隣接水準間での通訳（言い換え）は指導されます（図２移行期）。それ以外の異水準間通訳は、別に指導する必要があります（図２？部）。この指導がないと、高位水準で思考する際に、下位水準の考えを活用することが難しくなります。

アは、内容Ａから内容Ｂへの指導系統において、内容Ａと内容Ｂの間に根元的な矛盾がある場合があることを指摘しています。そして、イは、学習指導では、その矛盾を乗り越えるために、既存の考えの修正を含んだ知識の再構成を積極的に求め促す必要があることを指摘しています。以下、このアイを視点に関数領域の課題を指摘します。

(1)．代数系統下での事象への活用力伸張の困難性

算数では、諸事象（第０水準）を対象に比例関係等を学びます（第１水準へ）。中学校でその比例関係を関数として学び直し、以後、学年進

図２

行毎に扱える関数を増やします（第２水準へ）。その上で、微積分を学びます（第３水準へ）。そこには、比例から順に扱える関数を累積させれば、関数の活用力が育つという期待があります。では、その系統で、事象への関数の活用力は実際に育っているでしょうか。

筆者の行った調査では、中学校に入って関数として比例を学ぶと、途端に小学校で得意だった比例関係を利用する現実問題ができなくなる結果を得ています[3)4)]。中３生で達成度は同等までに回復しますが、解法は変わります。小学校では現象、具体物を語る言葉として算数を学びます（第１水準へ）が、中学校では、その際学んだ比例関係を関数として表します（第２水準へ）。中学校では、第１水準への移行に際して学んだ具体物そのものを語る算数の語用を補いませんから、達成度は変わらないはずです。しかし、関数を学び始める（第２水準）と比例（第１水準）を具体事象（第０水準）で一時活用できなくなり、後に改善されることを示したこの結果は、第２水準へ向けての関数学習が、それ以前に学んだ具体を語る算数の考えと一時的に不協和を起こしていることを示唆しています。このように、高位水準への学習を通じて、下位水準で存在した知識の結びつきが損なわれてしまうことは、具体事象へ活用する場合に顕著に現れます（図２の？部）。[5)6)]。

事象への活用指導が損なわれやすい背景として、関数指導の系統が、表現形式の指導に準じてなされている点を指摘できます。小学校では、数表で関数の考えを表しますから、様々な事象を取り上げることができます。中学校以降では、式の計算を求めるようになりますから、代数形式の指導系統に準じて比例から順に扱う関数の次数をあげていく系統が生まれます。関数領域の系統が、代数形式の系統に依存して決定されているわけです。その結果、現実事象では、極く稀にしか存在しない変化の割合一定の関数が優先的に取り上げることになり、変化の変化の様子を表現することは、それを表現する形式である微積分まで扱えないことになります。結果として、微分法導入時に扱う瞬間の速さが刻々と変化していく様子は、導関数を説明する際のメタファーではく、それ自体も新出内容として教える現実が生じます。導関数とは何かわからずに計算する生徒の姿は、扱える代数形式に準じて関数を指導する系統が、事象への活用力の育成に成功していない現実をよく物語っています。

(2). 独自のスパイラル系統を損なった関数領域

関数の水準が設定できる関数領域の系統と、ファンヒーレが水準を設けた図形領域の系統は、スパイラル性という点で性格が異なっていま

す。現在まで、図形領域では、一つの題材に対して、各水準に応じた探究方法が意図的に指導されています。例えば、小学校で平行四辺形の性質を探求（幾何の第1水準）したあと、中学で平行四辺形の定義と同値な性質を構成し直します（幾何の第2，3水準）。図形領域では、現在までは、このようなスパイラル型カリキュラムをなんとか維持してきており、水準に応じた探究の繰り返しを尊重しています。

関数領域はどうでしょう。時数豊かな現代化時代までは、3次関数や分数関数のグラフを扱った後、微積分でもう一度扱うなど、確かに図形領域と同様なスパイラルカリキュラムが存在していました。例えば、関数の合成など微積分によらないグラフ描画法を扱い、それを微分法で見直すというような水準に応じた探究の繰り返しが盛り込まれていました。当時は、確かに、固有領域として関数領域が存在したわけです。しかし、現代化後は、新出内容との調整や時数減への対応の必要から、繰り返しは指導効率が悪いという理由で削減される傾向が顕著です。代数形式に準じた関数指導の系統は、このスパイラル性の後退とともに顕在化してきました。カリキュラム開発者側では、そこでなされた削減や縮減は「概念の発展を見越した指導がなされればカバーされる」と期待します。しかし、受験を教育目的とする場合も少なくない高校では、入試の範囲内・範囲外という別の教育的配慮によって、形式を教えるまではその内容は取り上げないという教材間の間仕切りができていきます。

第2水準以降の関数指導の系統が代数形式へ依存した系統を強めた背景として、関数が他領域の諸概念を表す言葉として数学内での地位を確立した点を指摘できます。典型は、数Ⅰの平行移動による二次関数の解説です。二次関数の一般形を扱うだけなら、平行移動を扱う必要はありません。座標平面上で変換の考えを扱う範例として二次関数が必要なのです。現行数Ⅰでは、平行移動で説明しない扱いが強調されましたが、実際にはその平行移動の代数処理が困難な学校でも、平行移動で解説しています。形式と効率を優先する指導では、関数をどう教えるかより、関数で何を教えるかという多価性が尊ばれます。どのような関数かを調べる学習を飛ばして、代数や幾何で教えたい内容を教える言葉として関数を取り上げる状況が、調べ、発見し、確認し、証明し、振り返るなどの探究機会を関数領域から奪う結果をもたらしています。

(3). 水準間の矛盾を乗り越えるための結節教材の退化

高位水準の概念を低位水準の言葉で表そうとすれば、必然的に意味不明（通約不能、わからない）状況が生まれます。そのような状況を回避

するために、歴史的に導入されてきた、水準移行を促し、異水準間の結びつける結節教材があります。典型は、中学校で関数導入時になされる「〇〇に伴って変わる量はありますか」という独立変数から従属変数を想起させる展開です。何ら問題意識のない状況で「時間に伴って変わる量はありますか」と問えば、何でも解になって極めて不自然です。運動を観察してまず意識するのは、運動体の位置変化の様子であって時間でありません。自然科学では、最初に従属変数を認めて、それを制御する関数関係や独立変数を明かすことが、むしろ問題です。その不自然さにも関わらず、この問いを多くの教科書が採用しています。その目的は、小学校で関数の考え育成時に扱われたような「変われば変わる」「決めれば決める」関係（倍比例分析や商一定、積一定など：第１水準）を振り返り、関数定義（第２水準への移行）に必要な変数と関係を対象化することにあります。この問いの成立史を辿ると、クラインの改革と同時代の明治中期から現代化後まで、この発問が成立するに至る教科書上の比例と関数の定義変遷史を辿ることができます[7]。その歴史は、この問いの目的が、変数と関係の対象化にこそあったことを物語っています。現実には、この不自然な発問を、事象における関数の活用力を育てる決め手と見る先生方が少なくありません。しかし、筆者の調査結果では、逆効果を招いています[4]。この発問は、第１水準から第２水準への移行をはかる目的で生まれたわけですから、この発問では、第０水準と第２水準の結節は必ずしも保証されません（図２？部[6]）。

第２水準（代数・幾何）と第３水準（微積分）の結節教材の典型は、円や二次関数における接線の動的扱いです。円の接線も二次関数の接線も共有点１個ですから、円周上の１点を通り半径に垂直な直線と定義したり、判別式が０の場合とします。そこでは、動的に扱わずとも定義可能です。円や二次関数の接線（第２水準の意味での接線）で動的な扱いをする理由は、微積分での接線（第３水準の意味での接線）との整合性を

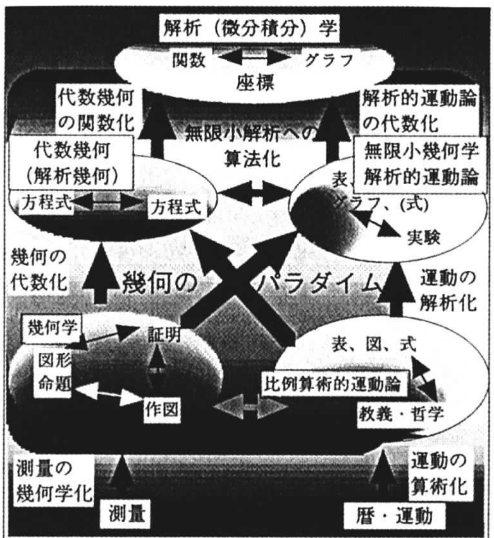


図３．微積分成立史

保証することにあります。円や二次関数では共有点１個を基準にしました、三次関数の接線は共有点１個に限りません。この代数・幾何的方法と微積分の間にあるずれを乗り越えるには、接する瞬間のイメージを代数・幾何的な表現の際に付与しておく必要があるわけです。

グラフにおよその接線を引き、その接線の傾きをプロットする結節教材は、過去には指導されました。現在では、そのような教材を用いることなく、この「動的」解説で、異なる接線表現を整合的に指導しようとしています。

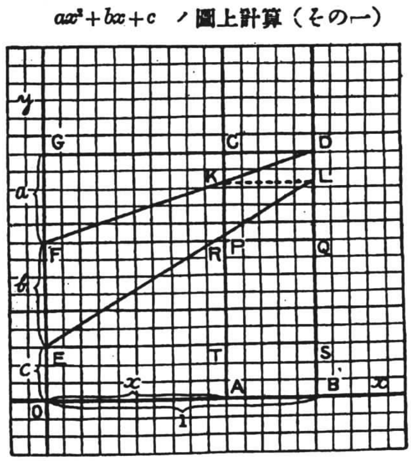


図４．整関数を作図する方法

(4). 失われた幾何との関連

関数は、改良運動当初、幾何と代数との融合材として注目されました。では、幾何との関係はどうなったのでしょう。歴史上、幾何はギリシャ数学と共に起こり、17世紀の100年間で代数・微積分に数学上の地位を譲ります（図３[8]）。ギリシャで曲線は幾何学の対象でしたが、微積分が確立して後、曲線は解析学の対象となります。用語functio(関数)がライプニッツによって言語化された時代は、微分法という接線作図の簡便法が確定する時代で、その新しい方法を表現する上で、旧来の幾何学上の接線作図を解析的な意味で表現する用語が必要になっていました。すなわち、幾何から代数、微積分への歴史的転換点で用語関数は生まれました。それゆえ、関数を融合材とみなす改良運動の思潮は、発生の本質にかなっていました。

旧制中学校数学一類、二類では、図３同様な幾何と運動双方を視野にした微積分へのすばらしい探究系統をみることができます。それは大正期以来の分科融合と微積分導入努力の成果でした。改良運動を先導し、代数と幾何の融合に尽力した黒田稔は、融合事例として $y = ax^2 + bx + c$ のグラフの定木とコンパスによる作図法を示しています（図４）[9]。今日の教育課程は、図３で言えば右側の流れに限りますから、それで学んだ筆者等世代は、左側の視野を知りません。その偏った視野で読めば、図４は、意味不明に映りますが、図４こそ、代数と幾何を融合させるために関数のグラフが採用された理由を示しています。

幾何の後退によって、現在、関数は、図形の性質のみを既知として証明を要請しない幾何の第２水準を念頭に指導されていますが、初等幾何を十分に扱った時代には、証明を必要とする第３水準を念頭に指導していました[8]。幾何学の代数化が進展した17世紀以降の数学史同様、関数は、他領域の概念を代数的に表現する言葉として他領域に浸透しました。その流れの中で、橋渡しをする対象であった幾何が後退したことは、関数を幾何的に探究機会を奪う結果ももたらしています。

２．探究を志向した関数領域のカリキュラム開発

(1). テクノロジーによる指導内容の問い直しと課題解決

私達は、従来の指導系統・内容を見直し、テクノロジー利用を包摂した新しい内容や系統を生み出す時代に直面しています。今日、テクノロジーは、高等数学処理を自動化しました。それは、電卓やレジスターの次元に留まりません。例えば、工学部で使う測定器には高等数学処理機能が組み込まれ、私達が教えるべきと信じた高等数学の理解抜きで観察・予見・判断をしてその測定器を使う状況が生じています。この状況は、私達が信じてきた、より抽象的な内容への到達こそ価値があるというという、数学の一般性・適用可能性に基づく有用観を突き崩し、改めて教えるべき内容は何かを問い直す状況をもたらしてるのです。

関数の視覚化や近似処理を典型とした数学用テクノロジーは、そのマルチプルリプリゼンテーション[10]（数学の多表現表示・処理・言い換え）機能により、数学研究と同じような仮説・検証型探究を教室で実現する動きを促進しています。最近では、数式処理機能も加わり、代数形式獲得と計算負担の

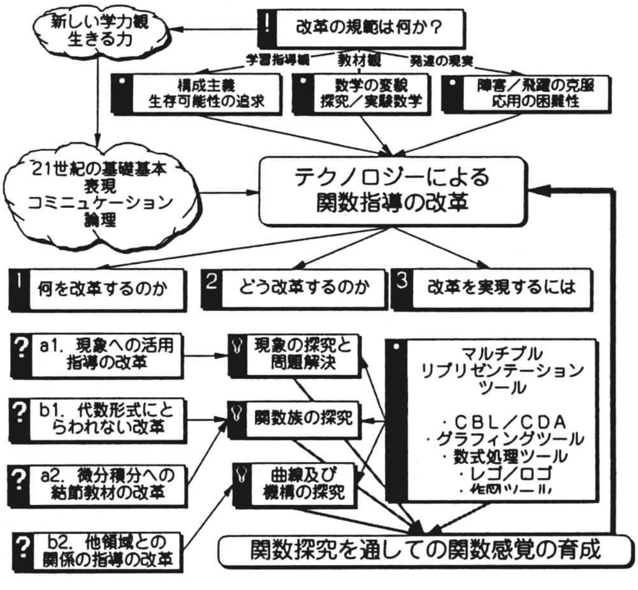


図５．代数・幾何・微積 ForAll プロジェクト

軽減を前提に、テクノロジーによる探究に基づくカリキュラム開発が(米国などで) 進展しています。現在進行する改革、それは改良運動や現代化運動に続く世界的改革運動に他なりません。このような時代認識に立ち筆者等は、テクノロジーによるカリキュラム開発研究「代数・幾何・微積ForAllプロジェクト」を進めています[11]。以下、その成果を基に、テクノロジーにより前述の課題が解決しえることを指摘し、この改革で注目される新しい関数指導の目標を提案します。

(2). テクノロジーによる探究

課題への対応は、図５では次のａ，ｂのようにまとめられています。

ａ．より探究的な水準移行を促すために：

a_1．実現象の数学的処理を扱う（図２の？部)。

a_2．水準間の移行を促す結節教材を扱う。

ｂ．水準に応じた関数のスパイラル型探究を実現するために：

b_1．過度の代数形式依存から解放する。

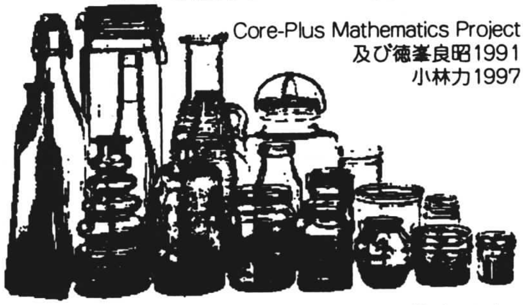
b_2．代数形式以外の表現との関連づけをはかる。

これら課題に対して、ForAllプロジェクトで開発した事例を示します。

図６は、変化の変化の様子を念頭で考察することを求める問題で、過去にはありましたが、積分の考えを要するので難しいなどの理由で失われます。代数形式による表現や考察を前提にした指導観が、変化の変化の様子を調べる教材を失わせたわけです。しかし、実データを扱えるテクノロジーは、その探究を容易に実現します[11][12]：a_1

b_1とa_2の典型は、関数族探究です。図７の探究をすると、代数形式へ依存した扱いでは意識できなかった係数ａ，ｂ，ｃの役割が認められます（b_1）[12]。従来の平行移動、標準型による扱いでは気づけないこの認識は、標準型$y=a(x-\alpha)^2+\beta$が、手でグラフをかく環境下で、平行移動を説明することをねらって取り上げられていることを再認させます。また、図７の関数族で現れる接線に注目すると、判別式以外の接線導出法を見出すこともできます。その方法は、微分表現によらない代数的接

問１．ビンに水を入れていきます。水位変化の様子を想像しグラフに表しなさい。

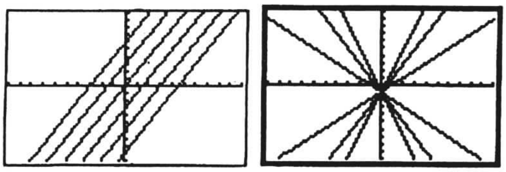


問２．逆に、グラフからビンの形を推定せよ。

図６．変化の変化を対象化する問題

線導出法として、整関数へ拡張可能です（a_2）[13]。その拡張は、代数表現された平行移動を活用する機会ともなります。さらに、微分法によらずに代数的に接線を求める一般論を探究するこの事例は、スパイラルな探究を保証することはもちろん、テイラー展開への結節教材にもなります[11]。

1次関数y＝ax＋bのaやbの役割は、下のように関数族を表示すると確認できます。



では、2次関数y＝ax^2＋bx＋cではa，b，cはどのような役割を備えているでしょう。グラフィングツールで調べよ。

永井・礒田(1995)及び佐伯・礒田・清水(1997)より

図７．関数族による探究

探究して気づくことは、証明はともかく、発見（推測）する上で使う形式が代数表現に限定されないことです。図８は、ニュートンが行ったとされる級数展開をマルチプルリプリゼンテーションツールで模した経路図です[11]。ニュートンは、表を拡張して、結果を得ています。そこでは表が形式不易の対象となって拡張が行われているわけです。代数形式で微分を表現するまで級数展開は扱えないという判断は、証明できない表現は教えないという考えに基づいています。テクノロジーによる探究を優先すれば、発見した生徒自身が知る理論では証明できない性質も見出されます。そこでは、発見を説明すべく、必要な代数表現を教えるという代数形式に従属しない逆の指導順序が実現します。

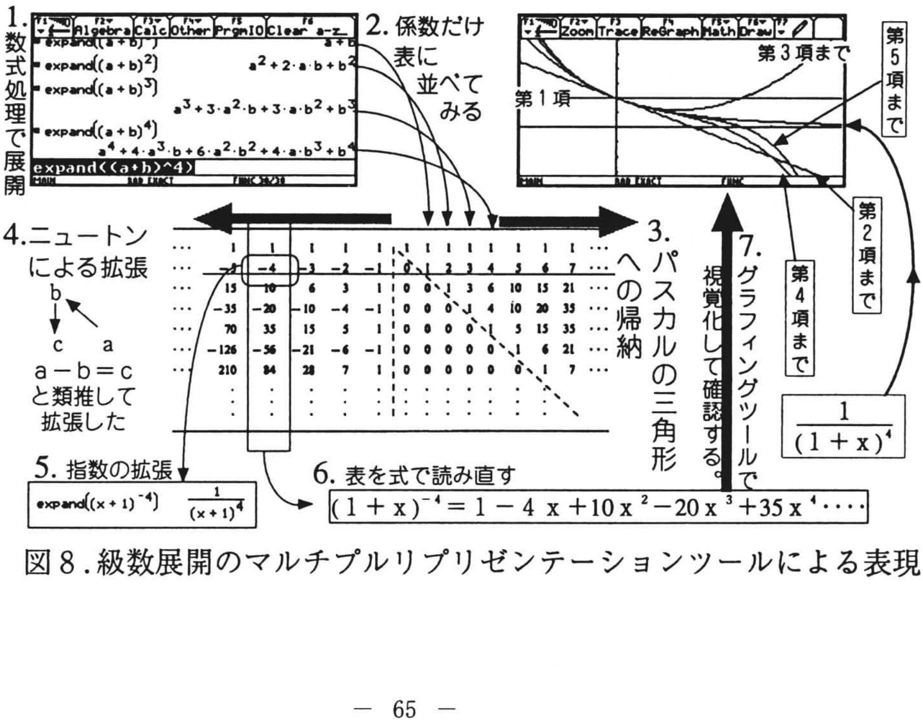


図８．級数展開のマルチプルリプリゼンテーションツールによる表現

テクノロジーで探究をはじめると、問題をこれまで以上に多様に設定し得る[12]ことに気づきます。実際、代数形式で表現されることを前提とした出題は、ともすれば、生徒が自ら問いを発する機会を損なってきました。例えば、代数形式で曲線を表現する今日の系統では、「曲線の接線をいかに引くか」というような自然な問いが失われています。解析幾何は、発見が容易でない幾何的解法に変わる簡便な解法を求めてできあがった理論であり、そこで扱う問題は、元々ギリシャの幾何学、作図題に遡れます。ところが学校数学では、初等幾何の後退もあって、幾何学的に問題を設定し、代数的に処理する教材は失われてしまいました。例えば、図4で作図される二次関数にどのようにすれば接線を作図できるでしょうか。実際に描画する行為に起源した問いかけは、幾何と関連した関数の性質の探究機会を再び設けます（b_2）。作図ツールを利用して曲線を表し、それを代数的に考察しようとすれば、このような代数・幾何の融合に関わる関数の探究を促進することができます。


図9．関数族による絵

以上、For All プロジェクトに事例を求めました。ご存じの通り、このプロジェクトの他にも、テクノロジーによる探究を主題にした沢山の事例開発が国内で進行しています。このような思潮は、先生方の間でも共有され始めました。一方で、これら事例は、従前の代数形式を遵守した展開とは異なるので扱う場がないという障害も指摘されています。しかし、前述したように、既に社会ではテクノロジーが普及し、代数形式の理解抜きで数学を利用する状況が進んでいます。テクノロジーによって実現される関数の新教材は、従前の課題解決を促すばかりでなく、そのような社会で真に必要な新目標をも顕在化させているのです。

(3)．顕在化する目標：シンボルセンスと関数感覚

テクノロジーが導入されることで数学本来の思考が一層促進されるという指摘があります。では、どのような思考が促されるのでしょう。電卓導入によってナンバーセンス・数感覚が強調されたように、グラフィングツールなどテクノロジー導入によってシンボルセンスや関数感覚が目標として急浮上しています。例えば、図9[14]を構成する関数とそのパラメータを特定する際に必要な能力とはどのような能力でしょうか。

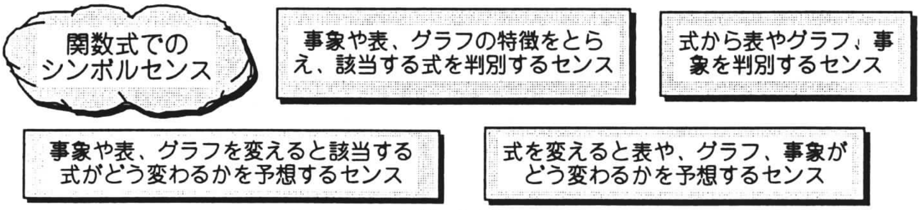


図 10. 関数感覚の一例

そこでは、合成関数や、関数の特性についての鋭敏な感性が必要になります。そのような感性は、シンボルセンスや関数感覚の一例です。

シンボルセンスや関数感覚の育成が目標として浮上した背景には、マルチプルリプリゼンテーション機能を備えた数学用テクノロジーが、仮説検証型探究に必要な表現変更型推論を促進するという共通認識があります。表現処理をテクノロジーに託したとしても、その表現を解釈し表現変更指示をすることは人間がすることです。マルチプルリプリゼンテーションツールでは、出力された表現を解釈・予見・判断して次の表現変更指示を入力しますからから、解釈・予見・判断に必要なセンスこそが求められます。イスラエルのアルカビが代数記号処理に注目してシンボルセンスを記述した[15]ようにシンボルセンスと関数感覚は、同じとは言えません。しかし、米国のＣＰＭＰ[16]では、グラフィングツールによって代数を関数で教える中で、表、式、グラフ、事象間の翻訳処理に必要な感覚(これは関数感覚か？)をシンボルセンスとして扱っていますから、その区別もできません。その定義を示すことは今後の課題として、まずは、そのようなセンスや感覚が、従来の数学的な考え方に関わる目標論の中でも、特に表現変更型推論を促進する解釈、予見や判断などの諸能力を強調する意図で用いられている点に注目する必要があります。図10は、関数式を扱う際に必要な判別予想項目を例示したものです[11]。その記述は、従来、関数の考えとして語られた目標を前提にしつつ、予見・判断や解釈を一層強調した表現になっています。

解釈・予見・判断をセンスや感覚という語感に込めて関数の考えの育成を語ることで、一層探究的に教材を読むことができるようになります。例えば、多変量事象から関数関係を抽出していく実践[17]があります。それは他教科で教える教材で、数学科の範囲を超えるという見解が従来ありました。しかし、テクノロジーはこのような事例が、数学で指導すべき本質的な活動であることを明確化しました。例えば関数の有用性のわかるカリキュラム開発を進めた筑波大学附属中の徳峯良昭氏等は、二変量の関数関係としてとらえられることのよさを知るために、

ピックの定理シミュレータを開発しています[11]。画面上に図形を描くと、周上の点の個数、内面の点の個数、図形の面積それぞれの値が表に表示され、二変量（例えば、周上の点の個数と面積）を指定するとグラフが点プロットされる仕掛です。勝手気ままに図形を描き続けると、周上の点の個数と面積のグラフに規則性は現れません。ところが、内面の点の個数をフィックスして図形を描くと、グラフに一定のパターンが現れます。多変量をフィックスして、ある変量に注目してパターンを探ろうとする態度は、図７の関数族探究などでも必須な基本技能ですが、従来、ほとんど指導対象とされてきませんでした。センスという言葉を使いますと、その活動に対して、「多変量から必要な変量を抽出するセンス」というように、その解釈・予見・判断に必要な能力としてラベル付けができ、その育成をはかる活動を強調することができます。

ForAllプロジェクトでは、現実の変量抽出ができない実状に対してテクノロジーを利用すると直接我々の運動感覚が視覚化され、変量抽出力が育成されることを示しました[18]。テクノロジーは、シンボルセンスや関数感覚の育成を目標として顕在化させると同時に、その育成に必要な道具であることも明らかになってきました。センスや感覚という言葉でこれまでの目標を見直し、そこで強調すべき点を明確に特徴づけることは、テクノロジーを前提とした社会で要請される解釈・予見・判断に関わる目標を示し、その育成をはかる上で必要です。

数学用テクノロジーが提供するマルティプルリプリゼンテーション環境は、表現変更型推論による関数の探究学習を促進します。その探究学習の実現は、表現を解釈し、判断し、予見する能力を一層伸張させようとすることへの目標のシフトとあわせて考える必要があります。

引用文献

1) Randolph A. Philipp, William O. Martin & Glen W. Richgels (1993), Curricular Implications of Graphical Representations of Functions, Edited by Thomas A. Romberg etal, Integrating Research on the Graphical Representation of Functions, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.pp.239-278

2) NCTM (1989), Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, National Council of Teachers of Mathematics. 邦訳、能田伸彦・清水静海・吉川成夫監修(1997)、「21世紀への学校数学の創造」丸善（筑波出版会）

3) Masami Isoda(1996), The Development of Language about Function: An Application of van Hiele's Levels, Edited by Luis Puig and Angel Gutierrez, Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Volume 3,　pp.105～112

4) 磯田正美・志水廣・山中和人(1990)「関数の活用の仕方と表現技能の発達に関する調査研究」日本数学教育学会誌第72巻第１号pp.2～17
5) J. Clement(1989), The Concept of Variation and Misconceptions in Cartesian Graphing, Focus on Learning Problems in Mathematics, vol.11,No.2
6) 磯田正美(1992)「数学の活用力育成への認識論的接近」北海道教育大学教科教育学研究図書編集委員会編「教科教育学の創造」東京書籍pp.62～78
7) 磯田正美(1992)「「ともなって変わる量はありますか」の成立をめぐって」中学校数学教育研究会誌No.27～30（合併号）pp.14～19
8) 磯田正美(1997)「曲線の表現史からみた代数、幾何、微積分の関連に関する一考察」筑波数学教育研究第16号pp.1～16
9) 黒田稔(1926)「数学教授の新思潮」培風館
10)Michal Yerushalmy, Judah L. Schwartz, (1993). Seizing the Opportunity to Make Algebra Mahtematically and Pedagogically Interesting, dited by Thomas A. Romberg etal, Integrating Research on the Graphical Representation of Functions, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. pp.41-68
11)筑波大学数学教育研究室(1994～1998),中学校・高等学校数学科教育課程開発の研究(1)～(5),（ForAll プロジェクトは現在も継続中である）
12)佐伯昭彦・磯田正美・清水克彦編「テクノロジーを活用した新しい数学教育～実験・観察アプローチを取り入れた数学授業の改善～」明治図書出版
13)磯田正美(1995)「van Hieleの水準の関数への適用の妥当性と有効性に関する一考察」筑波数学教育研究第14号,pp.1～16
14)Mutuko Sasaki, Tateaki Sasaki. (1996), Mathematical Functions Can Generate Interesting and Attractive Patterns, edited by Ogawa,T. etal. KATACHI Symmetry, Springer-Verlag Tokyo.
15)Abraham Arcavi(1994), Symbol Sense, For the Learning of Mathematics vol.14 No.3
16)Core-Plus Mathematics Project(1995), Functions and Algebraic Reasoning
17)磯田正美(1989)「ともなって変わる量の認識とその指導」日本数学教育学会誌第71巻総会特集号p281、教育科学数学教育1989年11月臨時増刊で紹介されている。
18)宮川健(1998)「テクノロジーによる関数関係理解の改善に関する一考察」日本数学教育学会誌第80巻１号pp9-14