Mathematics of Seki Takakzu and His Influence on Japanese Mathematics

Kenji Ueno
Seki Kowa Institute of Mathematics

関孝和（SEKI Takakzu）

- Born around　1640～1645
- There are no records SEKI was born in1642. Recently it was reported that there is a document showing he was born in 1645, but the document is not open to the public.
- Died 24th of October, 1708. (5th of December)

SEKI Takazu

- Born as the second son of 内山　永明（UCHIYAMA Nagaakira）
- Adopted by the family SEKI
- Adoptive father 関　十郎右衛門 (SEKI Juroemon) died on 9th of August 1665.
- 小十人組　A member of a team of defense of the lord

Theory of Equations in Jin, Song, Yuan Dynasty （12th century～14th century）

- Numerical solution by synthetic division (counting rods) Representation of equations by counting rods

$$27 + 13x - 72x^2 + 86x^3 = 0$$

$$27 \quad 13 \quad -72 \quad 89$$

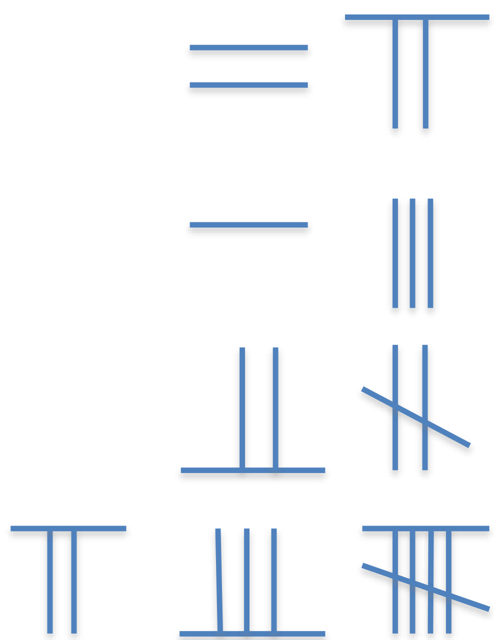
Tanabata(たなばた)

天元術(Tianyuan Shu)

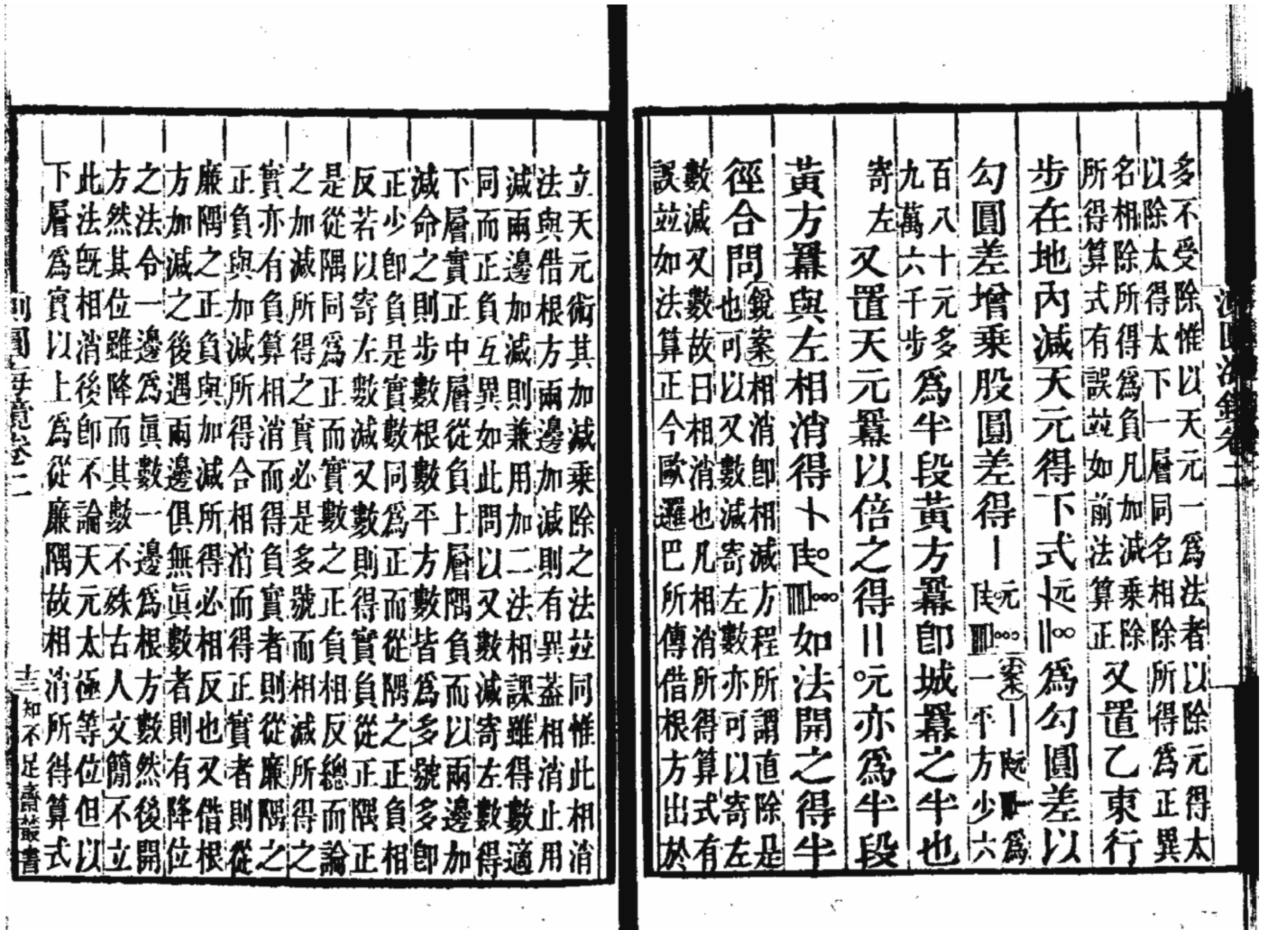
- Equation

$$27 + 13x - 72x^2 - 789x^3 = 0$$

- No equal sign ！



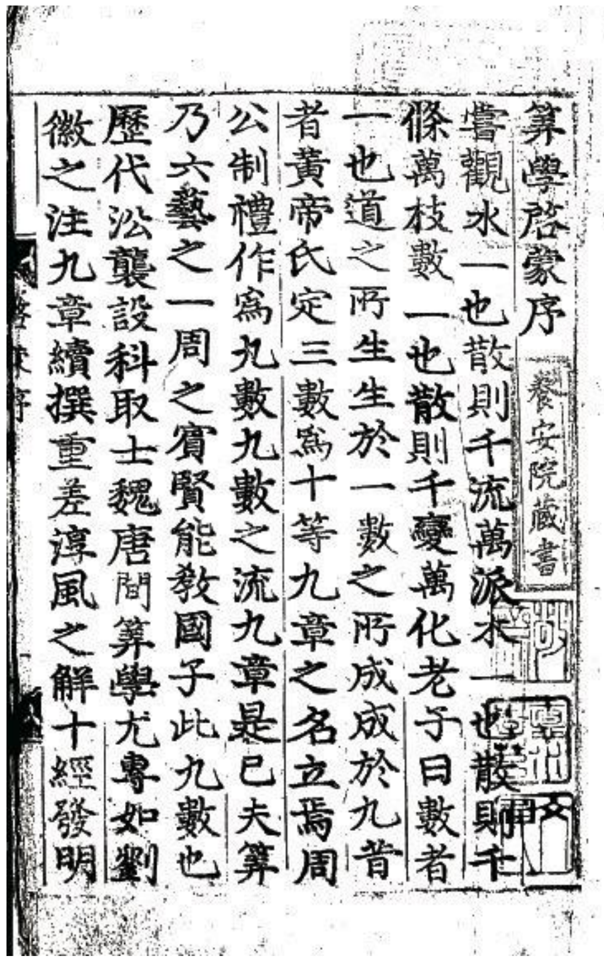
李治(Li Zhi)
「測円海鏡」(Ceyuan Haijing1248



多不受除惟以天元一爲法者以除元得太以除太得太下一層同名相除所得爲正異名相除所得爲負凡加減乘除所得算式有誤竝如前法算正 又置乙東行步在地內減天元得下式爲勾圓差以勾圓差增乘股圓差得（案）爲半段黃方冪即城冪之半也寄左 又置天元冪以倍之得亦爲半段黃方冪與左相消得如法開之得半徑合問（鏡案相消即相減方程所謂直除是也可以又數減寄左數亦可以寄左數減又數故曰相消也凡相消所得算式有誤竝如法算正今歐邏巴所傳借根方出於

立天元術其加減乘除之法竝同惟此相消法與借根方兩邊加減則有異蓋相消止用減兩邊加減則兼用加減二法相課雖得數適同而正負互異如此問以又數減寄左數得下層實正中層從負上層隅負而以兩邊加減命之則步數根數平方數皆爲多號多即正少即負是實數同爲正而從隅之正正相反若以寄左數減又數則得實負從正隅負正是從隅同爲正而實數之正負相反總而論之加減所得之實必是多號而相減所得之實亦有負算相消而得負實者則從廉隅之正負與加減所得合相消而得正實者則從廉隅之正負與加減所得必相反也又借根方加減之後遇兩邊俱無眞數者則有降位之法令一邊爲眞數一邊爲根方數然後開方然其位雖降而其數不殊古人文簡不立此法既相消後即不論天元太極等位但以下層爲實以上爲從廉隅故相消所得算式

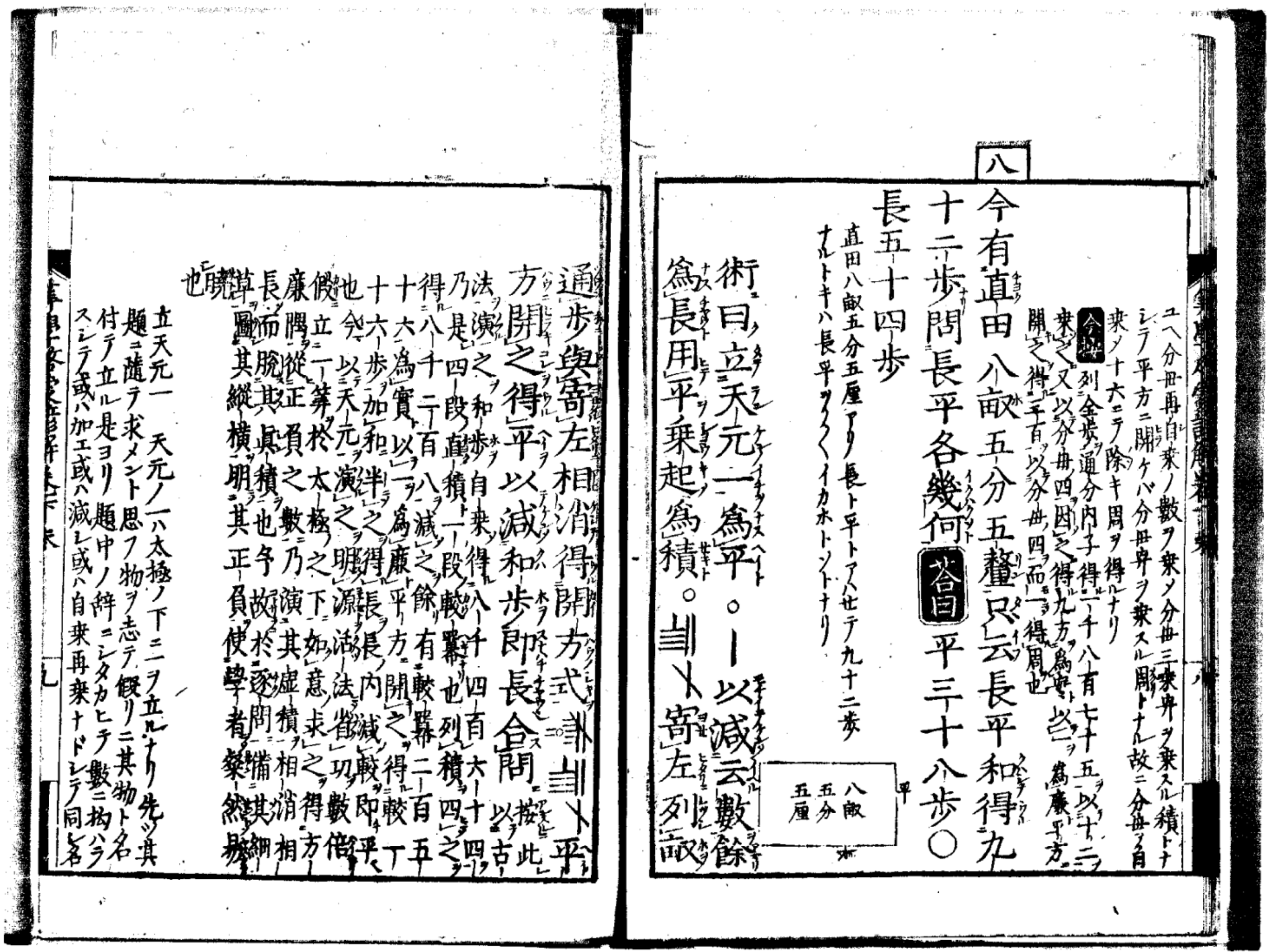
朱世傑(Zhu Shijie)
『算学啓蒙』(Suanxue qimeng) 1299



算學啓蒙序

嘗觀水一也散則千流萬派木一也散則千條萬枝數一也散則千變萬化老子曰數者一也道之所生生於一數之所成成於九昔者黃帝氏定三數爲十等九章之名立焉周公制禮作爲九數九數之流九章是已夫算乃六藝之一周之賓賢能教國子此九數也歷代沿襲設科取士魏唐間算學尤專如劉徽之注九章續撰重差淳風之解十經發明

『算学啓蒙』(Suanxue qimeng)
Last Chapter 開方釋鎖門



八

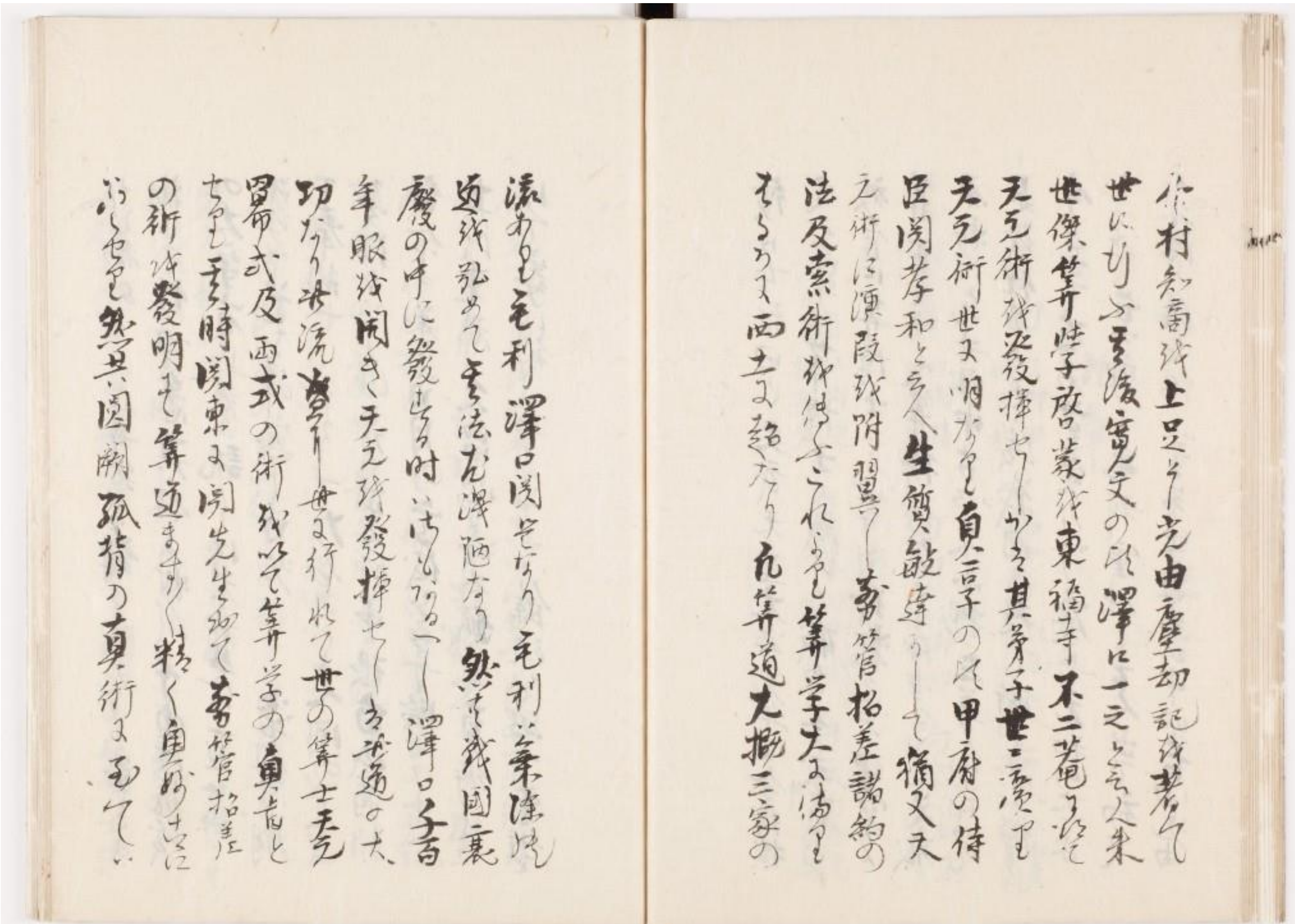
今有直田八畝五分五釐只云長平和得九十二步問長平各幾何 答曰 平三十八步○長五十四步

直田八畝五分五釐アリ長ト平トアハセテ九十二步ナルトキハ長平ヲノ〃イカホトソトナリ

術曰立天元一為平。丨以減云數餘為長用平乘起為積。

八畝五分五釐

中根彦循(NAKANE Genjun)
「数学小成」(Sugaku shosei)



東福寺(Tofukuji)

Tofukuji

- Collection of printed books published in Yuan Dynasty (元)

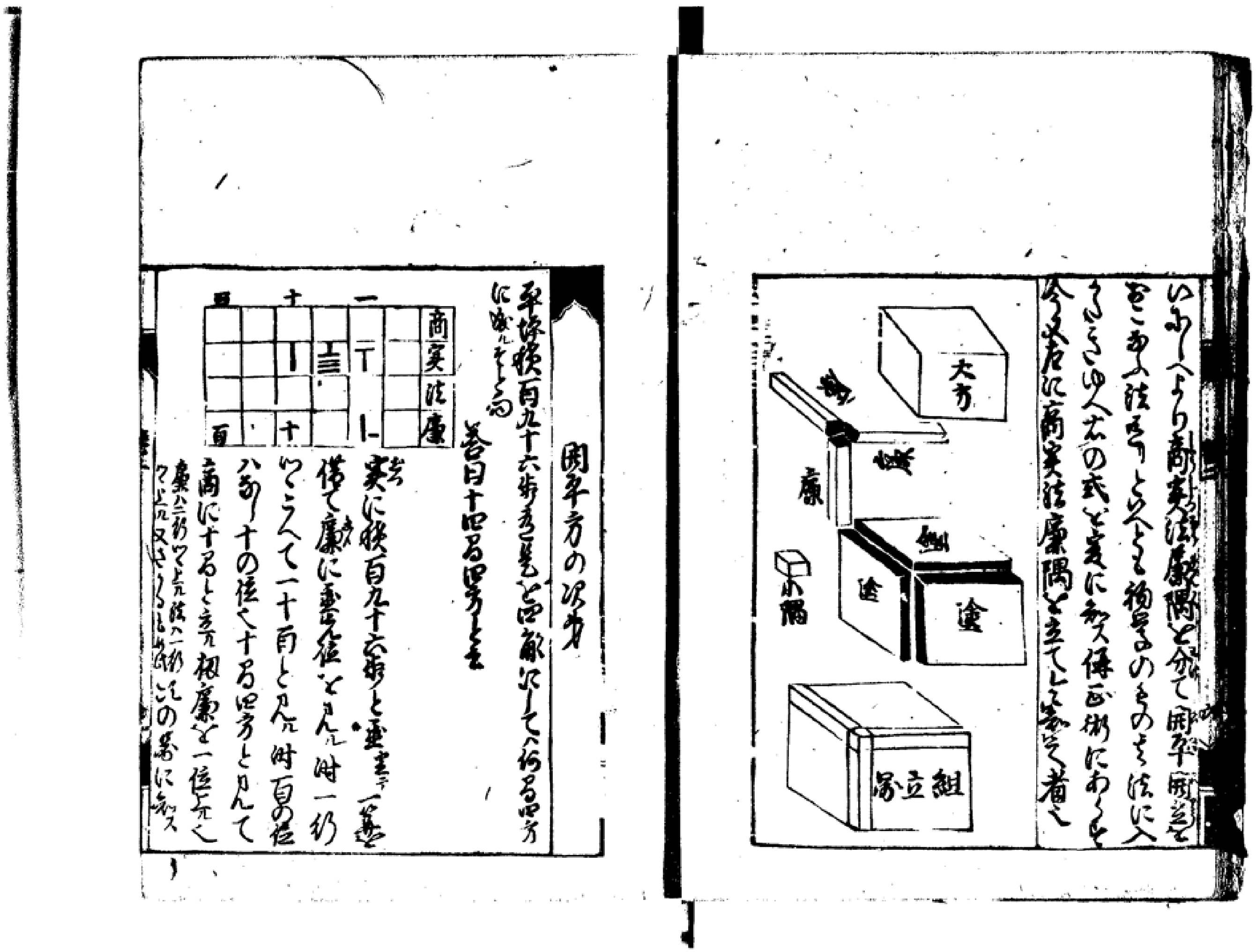
- Many books were published in Yuan Dynasty(元) by the Yuan government

東福寺　霊雲院(不二庵）
Tofukuji   Reiun-in(Fuji-an)

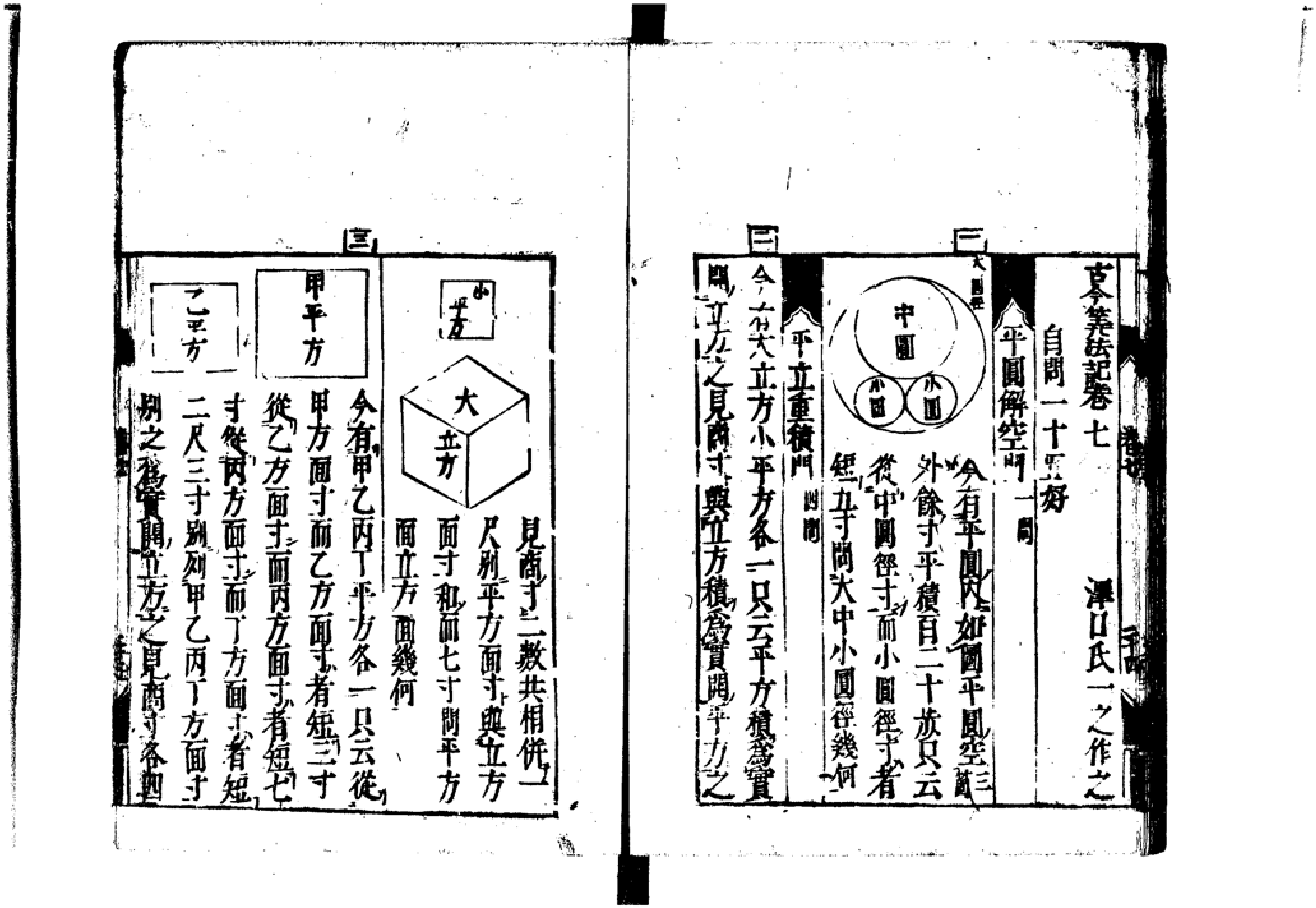
- Founded 1390

Kokon sanpoki

『古今算法記』1671



古今算法記遺題



古今算法記巻七

自問一十五好　澤口氏一之作之

平圓解空門　一問

今有平圓内如圖平圓空三箇外餘寸平積百二十歩只云從中圓徑寸而小圓徑寸者短五寸問大中小圓徑幾何

平立重積門　四問

今有大立方小平方各一只云平方積為實開平方之見商寸與立方積為實開立方之見商寸二數共相併一尺別平方面寸與立方面寸和而七寸問平方面立方面幾何

今有甲乙丙丁平方各一只云從甲方面寸而乙方面寸者短三寸從乙方面寸而丙方面寸者短七寸從丙方面寸而丁方面寸者短二尺三寸別列甲乙丙丁方面寸各自乘之為實開立方之見商寸各

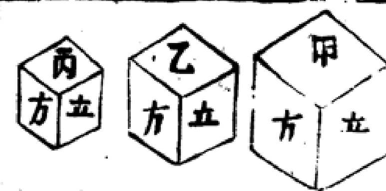
古今算法記遺題

和一丈五寸問甲乙丙丁方面幾

丙平方

丁平方

何

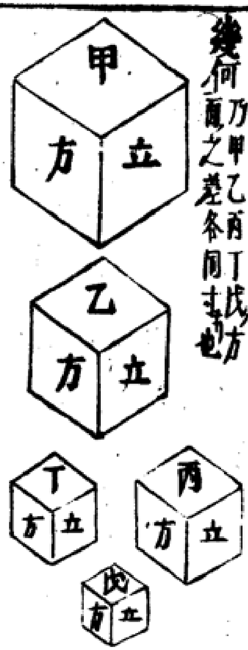


今有甲乙丙立方各一只云甲積與乙積相併共寸立積十三萬七千三百四十坪又乙積與丙積相併共寸立積十二萬千七百五十坪別甲方面寸為實與平方之見商寸與乙方面寸為實與立方之見商寸及丙方面寸為實與三乘方之見商寸

各三和一丈二寸問甲乙丙方面各幾何

今有甲乙丙丁戊立方各一只云甲積與乙積相併共寸立積七百坪又丙丁戊積各三和共寸立積五百坪問甲乙丙丁戊方面各幾何

乃甲乙丙丁戊方面之差各同寸也



Kokon Sapoki Prob. 4
古今算法記遺題

問題４　甲、乙、丙３種類の立方体がある。甲の体積と乙の体積を併せると 137340 坪、乙の体積と丙の体積を併せると 121750 坪である。また、甲の一辺の長さの平方根と乙の一辺の長さの立方根と、丙の一辺の長さの四乗根の和は１尺２寸である。甲、乙、丙のそれぞれの辺の長さを求めよ。

$$x^3 + y^3 = 137340$$

$$y^3 + z^3 = 121750$$

$$\sqrt{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[4]{z} = 12$$

$c = \sqrt[4]{z}$ の 108 次式

$$x = 36.86424\cdots, \quad y = 44.3516\cdots, \quad z = 32.5563\cdots$$

$$x = 51.45703\cdots, \quad y = 10.2935\cdots, \quad z = 49.4144\cdots$$

SEKI Takakzu

- Very few were known how SEKI studied mathematics.
- In 1665 he succeeded his father’s position

a member of a team of defense of the lord

(小十人組)

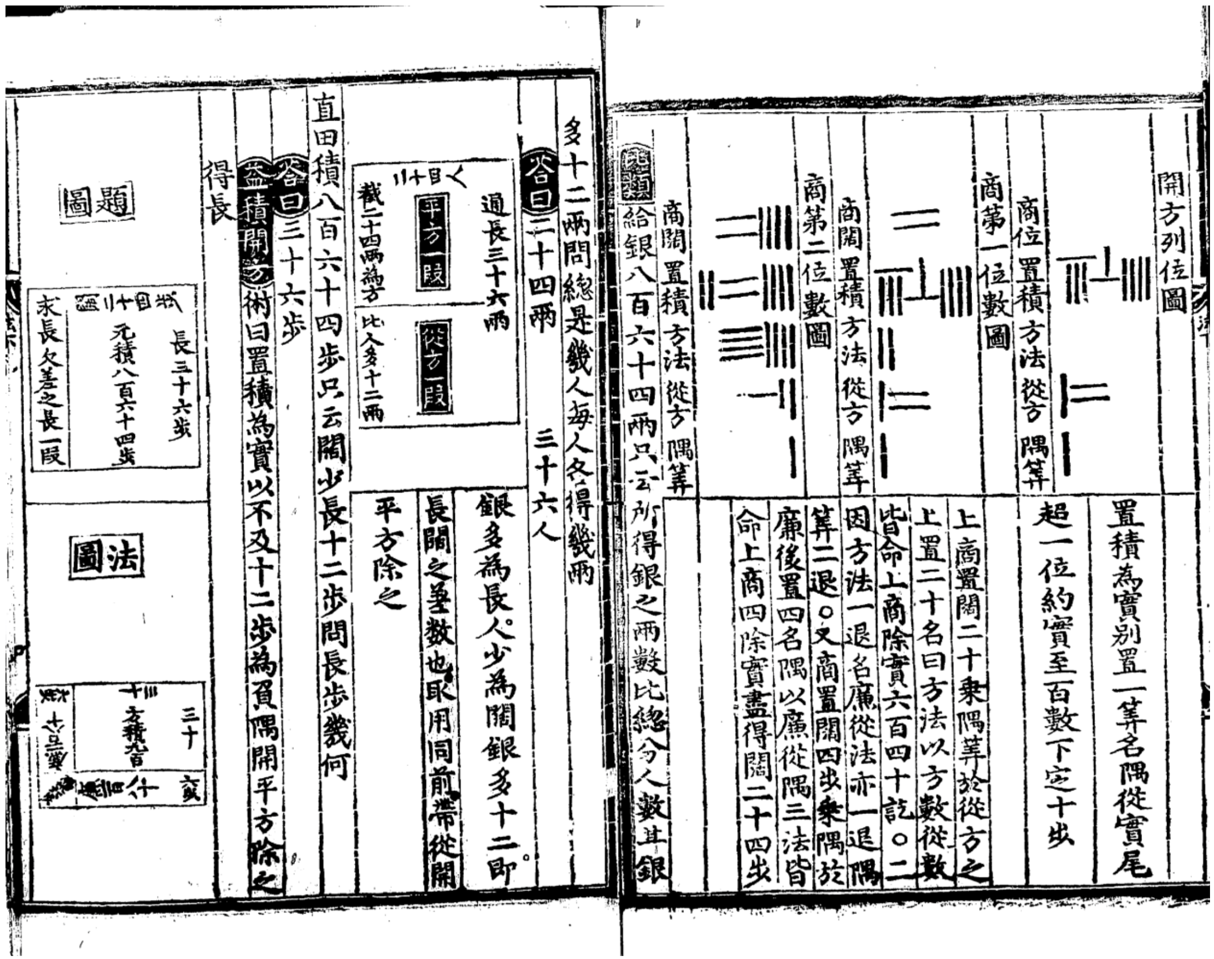
- He studied『楊輝算法』(Yang Hui suanfa)

Mathematical Works of SEKI Takakzu

- 延宝元年(1673) 『楊輝算法』(Yang Hui suanfa)の改訂版を作る (revised edition)
- 延宝2年(1674) 『発微算法』（Hatsubi sanpou)
- 天和3年(1683) 「解伏題之法」(Kaifukudai no ho)
- 貞享2年(1685) 「解隠題之法」(Kaiinndai no ho)「開方飜変之法」(Kaiho-honpen no ho)
- 宝永6年(1709) 『括要算法』(Katsuyo sanpo)
- 宝永7年(1710) 「大成算経」(Taisei sankei)

関孝和編「揚輝算法」
SEKI’s revised edition of
Yang Hui suanfa 1673

Numerical solution by counting rods


開方列位圖

商 位 置積 方法 從方 隅筭

商第一位數圖

商 闊 置積 方法 從方 隅筭

商第二位數圖

商 闊 置積 方法 從方 隅筭

置積為實別置一筭名隅從實尾
超一位約實至百數下定十步
上商置闊二十乘隅筭於從方之
上置二十名曰方法以方數從數
皆命上商除實六百四十訖○二
因方法一退名廉從法亦一退隅
筭二退○又商置闊四步乘隅於
廉後置四名隅以廉從隅三法皆
命上商四除實盡得闊二十四步

益積 給銀八百六十四兩只云所得銀之兩數比總分人數其銀
多十二兩問總是幾人每人各得幾兩
答曰二十四兩 三十六人

通長三十六兩
平方一段
從方一段
截二十四兩為方
比人多十二兩

銀多為長人少為闊銀多十二即
長闊之差數也取用同前帶從開
平方除之

直田積八百六十四步只云闊少長十二步問長步幾何
答曰三十六步
益積開方術曰置積為實以不及十二步為負隅開平方除之
得長

題圖

長三十六步
元積八百六十四步
求長欠差之長一段

法圖

Seki's correction

右楊輝五曹共皆非也

數以南二十五步巾來
一百四十万六百二寸
之內減寄位餘以一卞
之得一十八方一千四
六步少閑平方除之得
二十五步九一八一二
強再寄列西以北棄
半之加入再寄得七百
三步四一八一二五九
積步也以畝法除之為
滿為步又不盈步以一
來之合問

草曰句闊十二步股長二十六步四分四
九絲半用句股相乘折半得積一百二十三
分七厘四毫七絲二忽半又置梯田南闊
步四分四厘九毫九絲半併北闊十五步以
十七步乘之得積六百三十六步六分四
一絲五忽併二積共七百六十步一分二厘
八絲七忽半以畝法除得三畝四十步零
步之積二十五乘之得三尺九分六厘八
半
直田長四十八步闊四十步計積八畝今欲
長四十八步截賣三畝問闊幾何

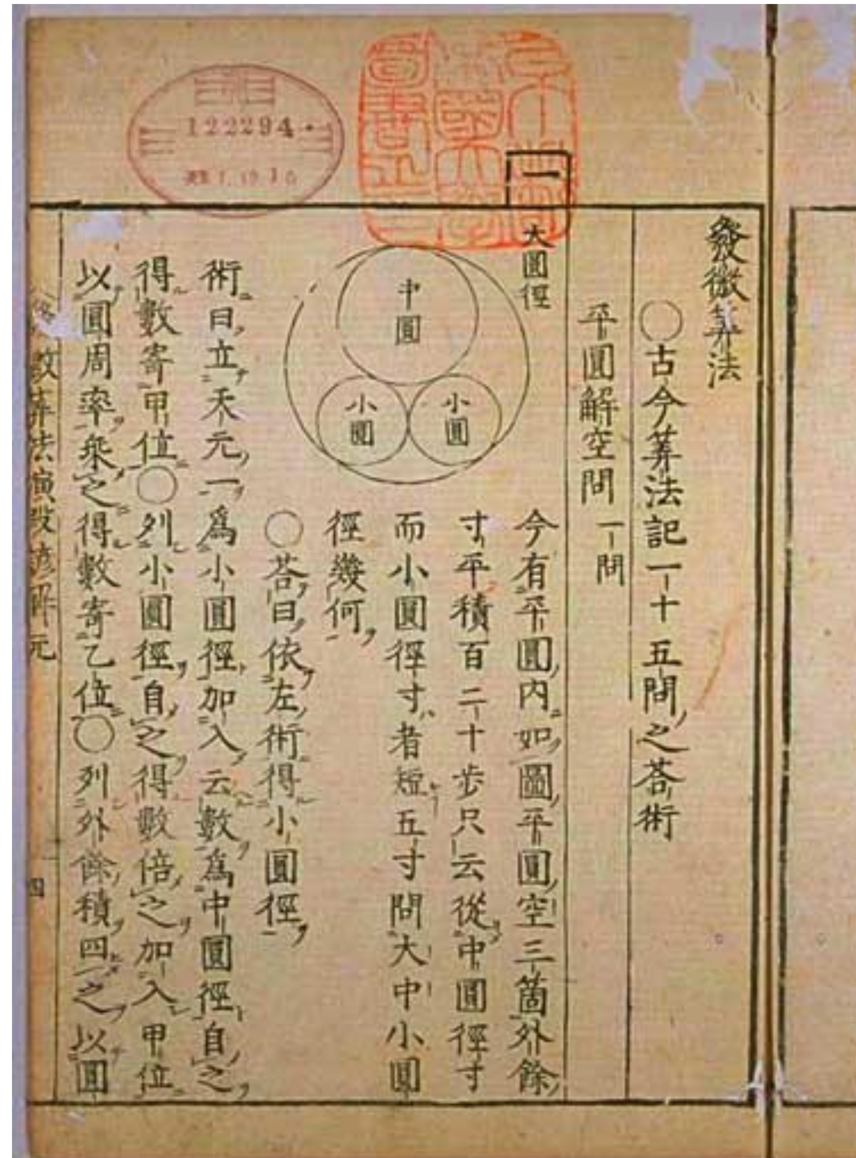
Mathematics of SEKI Takakazu

- New development beyond the classical Chinese mathematics
- SEKI invented a method to write equations with many unknowns (side writing method(傍書法)
- Elimination theory by introducing the notion of determinants.
- 1683 [解伏題之法」, E. Bézout 1764

『発微算法』(Hatsubi sanpo)1674

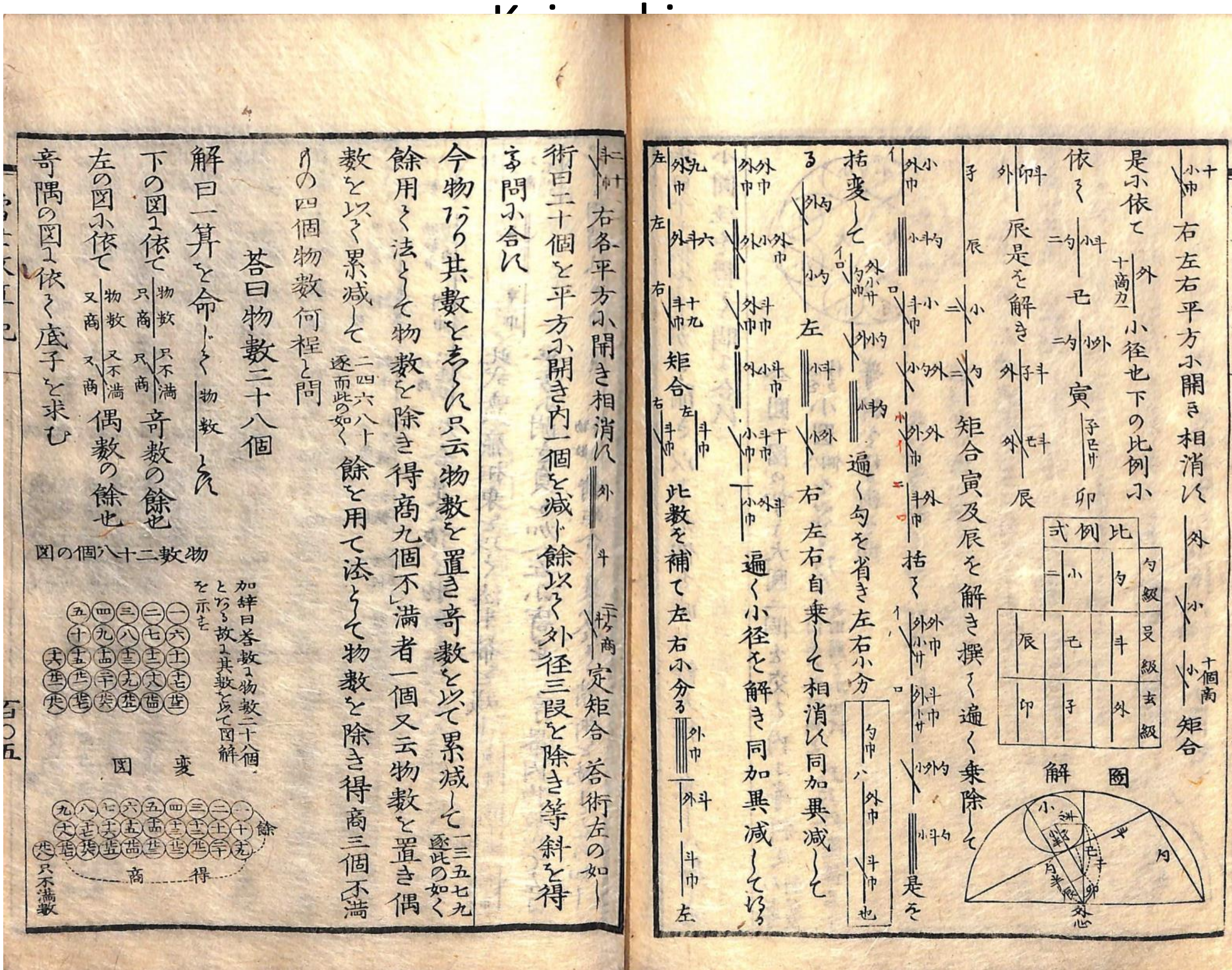
- Inside the framework of Chinese mathematics

Change the meaning



『当世改算記』傍書法 1847

Tosei Kaisanki, side writing system


當世改算記

百〇四

是ニ依て右左右平方ニ開き相消ハ矩合

小径也下の比例ニ依て

辰是を解き

矩合寅及辰を解き撰て遍く乗除して

括変して遍く勾を省き左右ニ分

る

右左右自乗して相消ハ同加異減して

遍く小径を解き同加異減して

比数を補て左右ニ分る

比例式

解図

右各平方ニ開き相消ハ定矩合　荅術左の如し

術曰二十個を平方ニ開き内一個を減し餘以て外径三段を除き等斜を得

る問ニ合ハ

今物ありて其数を志らハ只云物数を置き奇数を以て累減して一三五七九逐此の如く

餘用て法として物数を除き得商九個不満者一個又云物数を置き偶

数を以て累減して二四六八十逐而此の如く餘を用て法として物数を除き得商三個不満

りの四個物数何程と問

荅曰物数二十八個

解曰一算を命じて物数とし

下の図ニ依て　物数　只商　只不満　奇数の餘也

左の図ニ依て　物数　又商　又不満　偶数の餘也

奇偶の図ニ依て底子を求む

物数二十八個の図

加辞曰荅数ニ物数二十八個となる故ニ其数を以て図解を示す

変図

餘

得商

只不満数

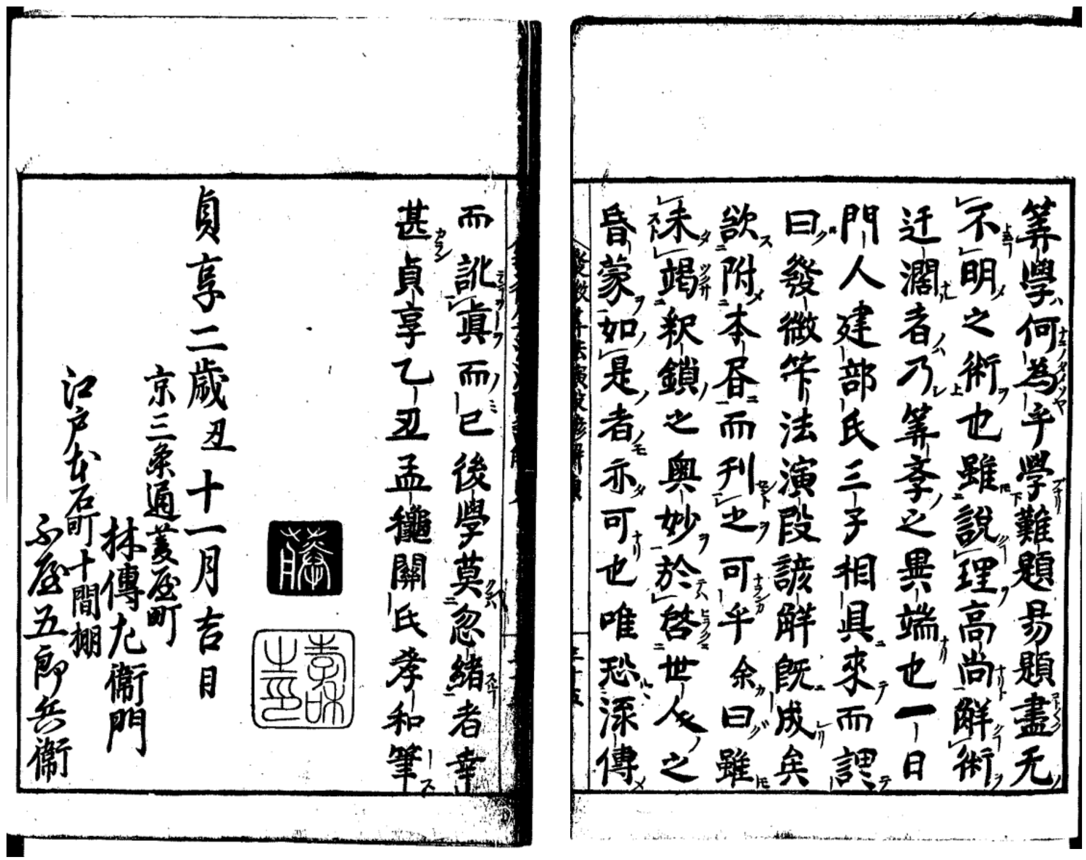
百〇五

Mathematics of SEKI

- Establish a general theory of equations of one variable

- Establish a general theory of elimination theory

Hatsubi sanpo endan genkai
『発微算法演段諺解』跋 1685



筭學何為乎學難題易題盡无
不明之術也雖説理高尚解術
迂濶者乃筭家之異端也一日
門人建部氏三子相具來而謁
曰發微筭法演段諺解既成矣
欲附本書而刊之可乎余曰雖
未竭釈鎖之奥妙於啓世人之
昏蒙如是者亦可也唯恐深傳
而訛真而已後學莫忽緒者幸
甚貞享乙丑孟龝關氏孝和筆

貞享二歳丑十一月吉日
京三条通菱屋町 林傳左衛門
江戸本石町十間棚 本屋五郎兵衛

『発微算法演段諺解』跋

- 算学は何の為ぞや。難題、易題、盡(ことごと)く明かにせずと云うこと無くの術を学ぶなり。理を説くこと高尚なりと雖も、術を解くこと迂闊(うかつ)なるものは、乃れ算孳(がく)の異端なり。一日、門人建部氏三子、相具に来たりて謂て曰く、発微算法演段諺解既に成れり、本書に附して、これを刊せんと欲す、可ならんか。

跋文読み下し

- 余が曰く、いまだ釈鎖(しやくさ)の奥妙を竭(つ)くさずと雖も、世人の昏蒙(こんもう)を啓くにおいては、是の如くのものも亦可なり、唯、流傳して真を訛(あやま)らんことを恐るるのみ、後学、忽緒(こつしよ)すること莫くんば幸甚からん。

貞享乙丑孟穐(もうしゆう)関氏孝和筆す

藤印 孝和之印

貞享2年(1685年)秋

Afterword by SEKI

- For what purpose one studies mathematics? One learns the art of solving all problems, not only difficult but easy ones.   Only telling sophistic things without solving all the problems, he is not a true mathematician.
- One day three brothers of TAKEBE visited me asking a permission of publishing Hatsubi sanpo endann genkai.

Afterword of SEKI

- I answered that even though the book does not contain the most important part of the theory, such a book may be useful for the public. But I am afraid that only methods to solve a few problems would become popular so that they would misunderstood the true theory.
- Young scholars should not forget the point!

Elimination theory

- Method to find simultaneous equations
- Simplify the simultaneous equations

$$f(x,y) = 0$$
$$g(x,y) = 0$$
$$\deg_y f(x,y) = \deg_y g(x,y) = n$$

- Algorithm to find n equations of degree n-1

$$h_j(x,y) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{jk}(x) y^k, j = 1, \ldots, n$$

Elimination theory

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= 0 \\
g(x,y) &= 0
\end{aligned}
$$

Both equations are of degree n in y.

$$
\begin{aligned}
a_{11}(x) + a_{12}(x)y + \cdots + a_{1n}y^{n-1} &= 0 \\
a_{21}(x) + a_{22}(x)y + \cdots + a_{2n}y^{n-1} &= 0 \\
\cdots\cdots & \\
a_{n1}(x) + a_{n2}(x)y + \cdots + a_{nn}y^{n-1} &= 0
\end{aligned}
$$

$$\det(a_{ij}(x)) = 0$$

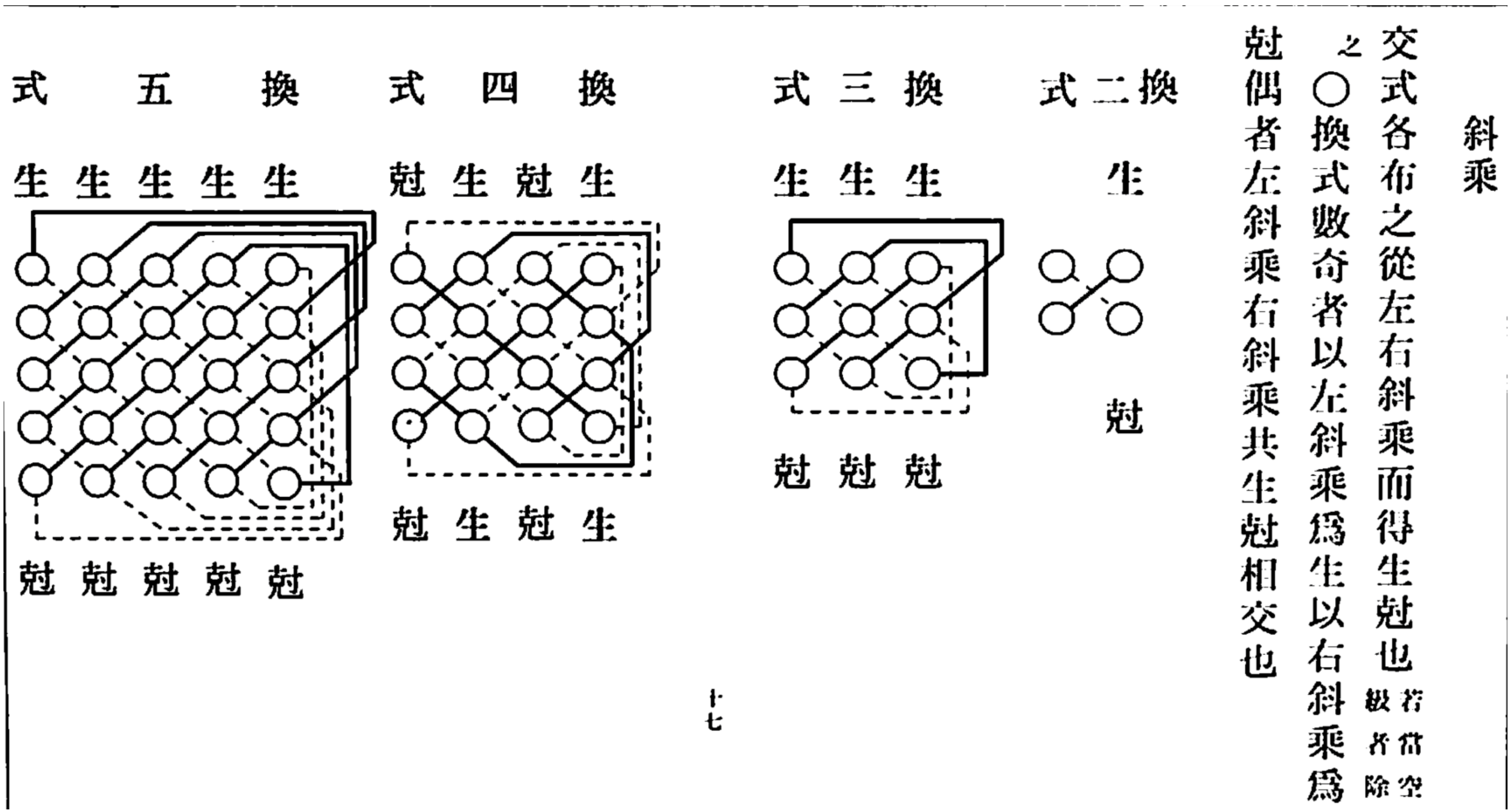
Elimination theory

$$h_j(x,y) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{jk}(x) y^k, j = 1, \ldots, n$$

- Elimination of y, resolvent

$$\det(a_{jk}(x)) = 0$$

SEKI’s slant product (斜乘)



斜乘

交式各布之從左右斜乘而得生尅也若當空級者除之〇換式數奇者以左斜乘爲生以右斜乘爲尅偶者左斜乘右斜乘共生尅相交也

換二式

生

尅

換三式

生生生

尅尅尅

換四式

尅生尅生

尅生尅生

換五式

生生生生生

尅尅尅尅尅

十七

Theory of equations

- Kai-indai no ho (解隠題之法)
- Addition and subtraction of polynomials
- Multiplication of polynomials
- A=B ➔ A – B =0
- Systematic method to find numerical solutions of polynomials (before SEKI they used a method to find a solution from the highest digit to lower digits.

Theory of equations

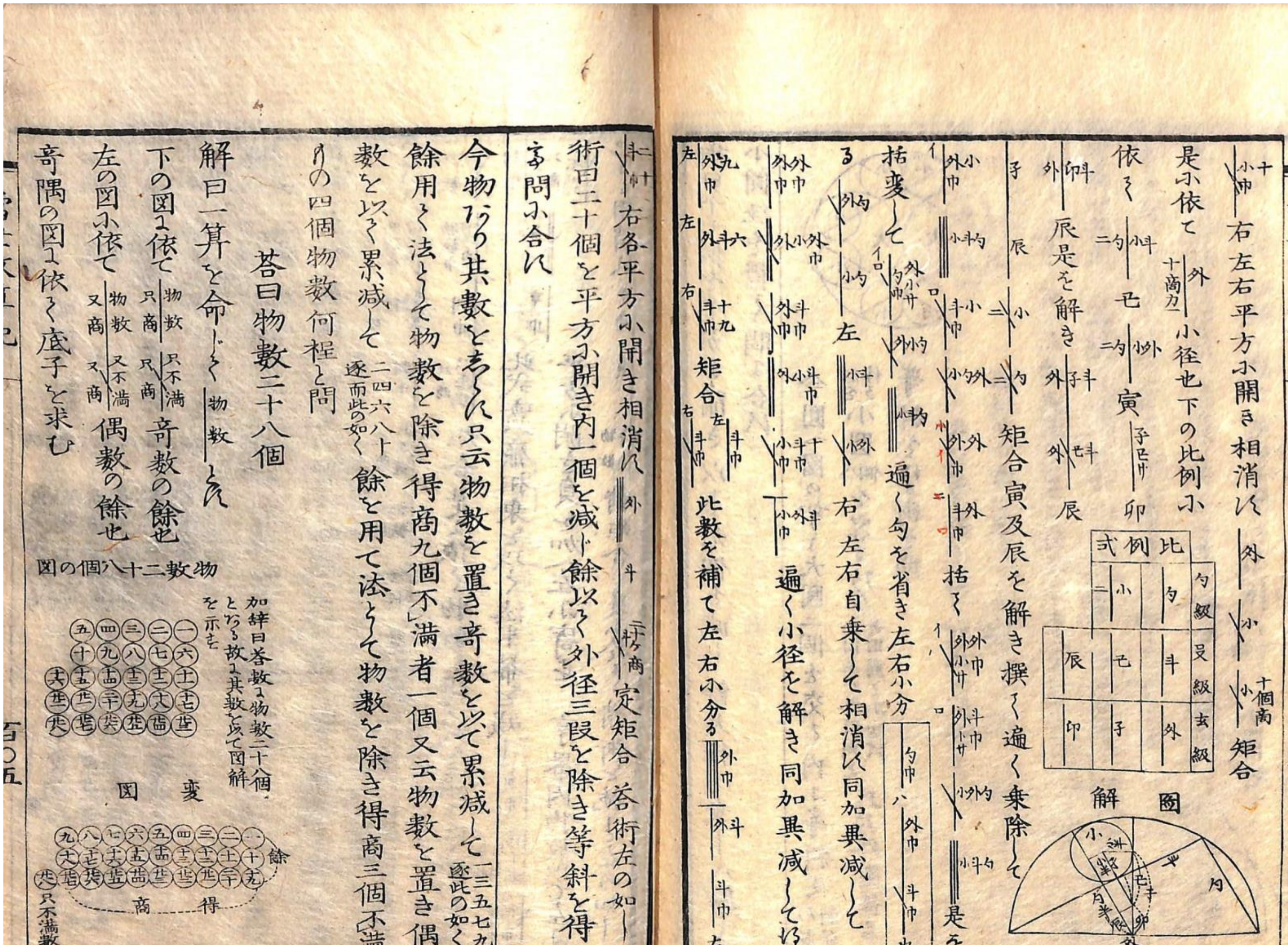
- Use synthetic divisions
- Use negative numbers to perform the synthetic divisions

- Approximated numercal solutions (the same result by Newton’s method)

After SEKI

- SEKI’s mathematics was accepted widely
- At the end of Edo period, many people could use the side writing system.
- But SEKI’S view to mathematics was never understood

『当世改算記』傍書法 1847
Tosei Kaisanki, side writing system
Tosei Kaisanki


右各平方ニ開き相消ス 定矩合 答術左の如し
術曰二十個を平方ニ開き内一個を減じ餘以て外径三段を除き等斜を得
右問ニ合ス
今物ありて其數を志らず只云物數を置き奇數を以て累減して 一三五七九逐而此の如く
餘用て法として物數を除き得商九個不満者一個又云物數を置き偶
數を以て累減して 二四六八十逐而此の如く 餘を用て法として物數を除き得商三個不満
りの四個物數何程と問
答曰物數二十八個
解曰一算を命じて 物數 とす
下の図ニ依て 奇數の餘也
左の図ニ依て 偶數の餘也
奇偶の図ニ依て底子を求む

Taisei sankei (大成算経)

Project was started on 1683
TAKEBE Kata-akira 1710

20 volumes, written systematic ways, but SEKI seemed unsatisfactory with the book.

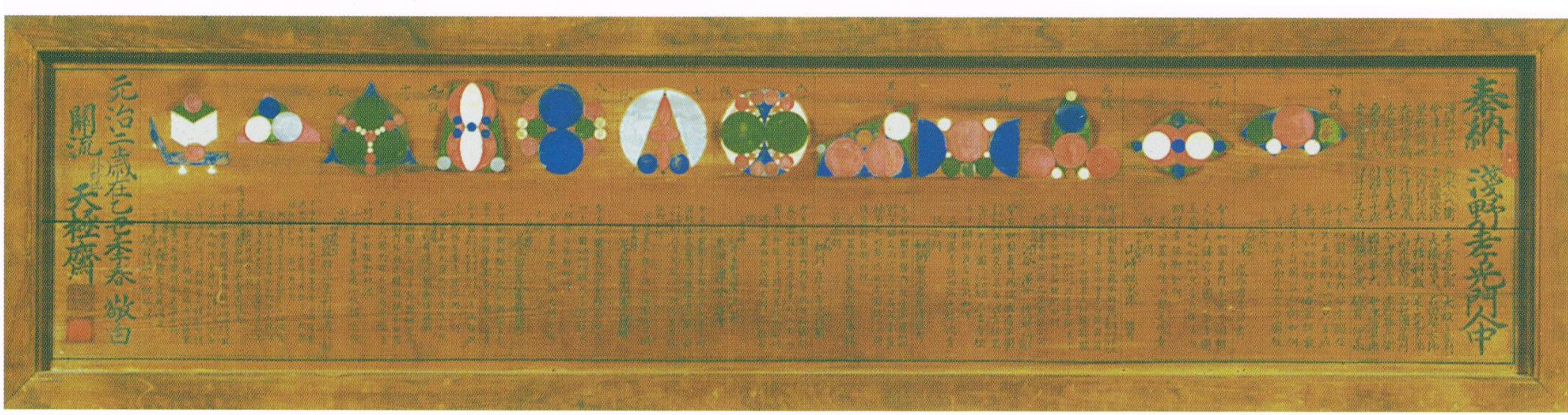
It was not written in logical order.

e.g. vol.3 A part of the theory of equations

vol. 17 The first part of the theory of equations.(Kai indai no ho (解隠題之法))

Myojorinji Temple in Ogaki
大垣市明星輪寺算額 1865

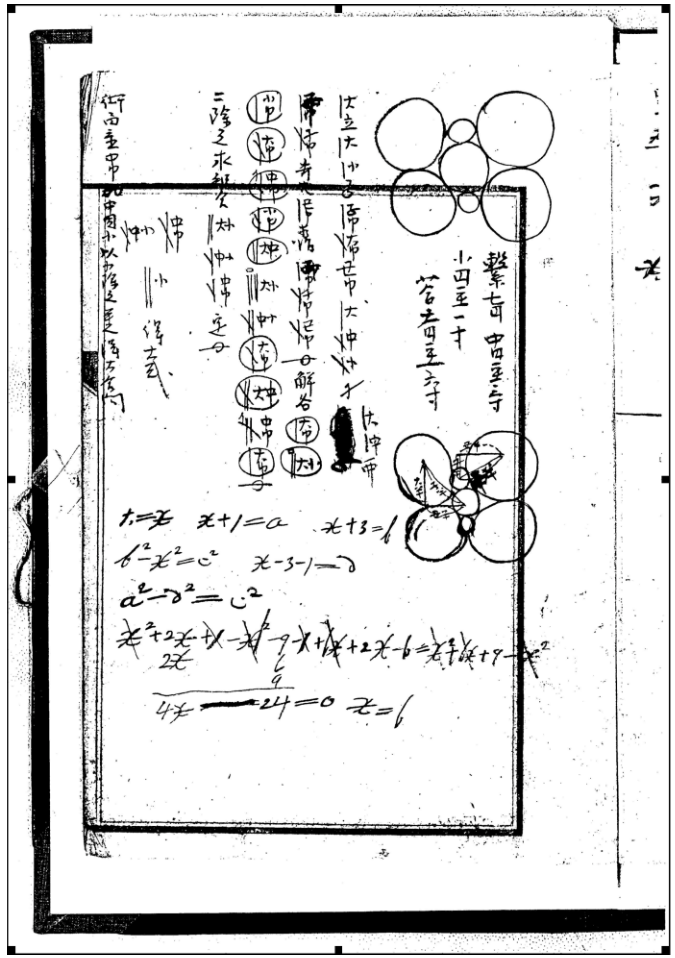
- Problem 3　河合沢女十六歳(16, girl)
- Problem 6　奥田津女
- Problem 10　田辺重利十五歳 (15, boy)
- 58×224cm



Sozume Hachimangu, Okayama

惣爪八幡宮　岡山市 1861

SATO Noriyoshi
佐藤　則義



Miki Scholl 三木流『和洋一覧』