

**Thirteenth-Century Chinese Mathematical Texts and
Its Pedagogical
Implications in the 21st Century:
Suanxue qimeng and *Yang Hui suanfa***

Wann-Sheng Horng (洪萬生)

Department of Mathematics

National Taiwan Normal University, TAIWAN

***Suanxue qimeng* and *Yang Hui suanfa* in East Asia**

- ***Suanxue qimeng* (by Zhu Shijie) and *Yang Hui suanfa* (by Yang Hui): the two most important texts of mathematics which greatly influenced how *tongsan* (東算 Korean mathematics) and *wasan* (和算 Japanese mathematics) took their shape.**
- **Big issue to which historians of mathematics in East Asia would pay a lot of attention despite that both traditions had already well developed on their own.**
- **Reference: 兒玉明人 (Kodama Akito) , 《十五世紀朝鮮刊 銅活字版數學書》**

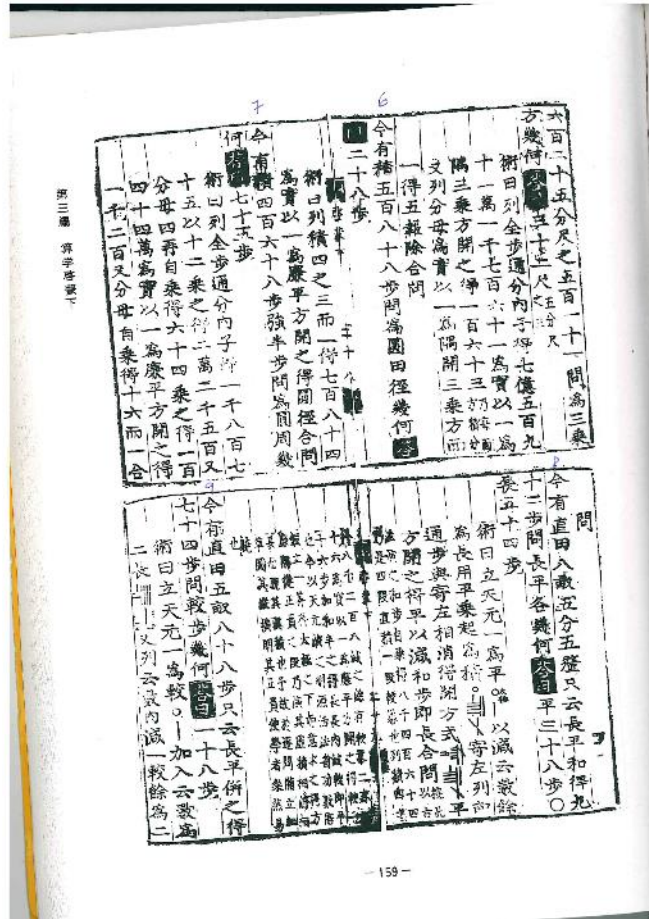
HPM and Ancient Texts of Mathematics

- **Taking an HPM perspective, these texts can also be introduced into mathematics class, either in college liberal study program or high school, in a very interesting way.**
- **A few problems from these two texts demonstrating how HPM perspectives can shed new light to exploring their meanings (both mathematical and historical).**

Yanghui suanfa (楊輝算法)

- **Yang Hui, also known as Qianguang, a native of Qiantan (present-day Hangzhou) in Southern Song dynasty (1127-1280). He served local government as a low official responsible for accounting.**
- **His collected work on mathematics, *Yanghui suanfa*, includes *Chengchu tongbian suanbao* (乘除通變本末), *Fasuan chuyong bunmo*, *Xugu zhaichi suanfa* (續古摘奇算法) and *Tianmu bilei chengchu jiefa* (田畝比類乘除捷法)**
- **A syllabus for mathematics learning (習算綱目) from *Fasuan chuyong bunmo* (法算取用本末, p. 54)**
- **Area Formulas for Planar shape from *Tianmu bilei chengchu jiefa* (pp. 87-89, 91)**
- **Information about Korean edition (朝鮮板刻資料)(p. 97)**

Problem Solving in terms of the method of *tianyuan* in SQ



六十四尺間共用使幾何
 術曰併兩廣而半之得六丈八尺於上位又
 以高六尺乘之得六十六尺於上位又
 列表三里以古法三百步通之得五
 九百七十四步又以原法乘之得五
 十八百四十四尺以乘上位得三十八
 萬五千七百四尺為幾積也次大為
 百六十四尺為幾積也法而一不滿

者各以四約之即得合問
 今有方堡濶自方二十四尺高二丈一尺間
 積尺幾何
 術曰利方二十四尺自乘得五百七十
 六尺又以高二丈一尺乘之得一萬二
 千九百六尺為積也合問
 今有圓堡濶周三丈七尺高一丈四尺間積
 尺幾何
 術曰列周三丈七尺自乘得一千三百

六十九尺又以高一丈四尺乘之得一
 萬九千一百六十六尺以周法十二而
 一不滿法者各半之合問
 今有方堡濶一府上方二丈八尺下方三丈
 二尺高四丈六尺間積尺幾何
 術曰上方自乘下方亦自乘又上下方
 相乘三位併之共得二千七百四尺又
 以高四丈六尺乘之得一十二萬四千

三百八十四尺以三而一不滿法者
 之合問
 今有圓堡濶一府下周四丈七尺上周二丈
 九尺高三丈八尺間積幾何
 術曰下周自乘上上周亦自乘又上下周
 相乘三位併之共得三千八百二十三
 尺又以高三丈八尺乘之得一十四萬
 五千二百七十四尺以三十六而一不

法而一合問

求差分和問九問

今有雞鬼一百共足二百七十二隻只云雞足二鬼足四問雞鬼各幾何
答曰雞六十四鬼三十六箇

術曰列一百以鬼足乘之得數內減共足餘一百二十八為實列雞鬼足以少減多餘二為法而一得雞反減一百即鬼合問○又術曰倍一百以減共足餘

半之即鬼也

今有錢二十九貫六百八十七文五分共買蠟一百四十六斤六兩只云蠟斤價三百八十文蜜斤價六十八文問各幾何
答曰蜜八十三斤二兩○蠟六十三斤四兩

術曰列蠟蠟共數斤下留兩以蠟斤價乘之得五十五貫六百二十二文五分內減今有錢餘二十五貫九百三十五文為實列蠟蠟斤價相減餘三百一十

三文為法實如法而一得蜜斤五分者身外加六為兩反減共數餘即蠟也合問

今有粟米一十七碩三升直錢一十九貫四百三十三文只云粟斛價七十五文米斛價一百六十四文問各幾何
答曰米七碩四斛五升○粟九碩五斛八升

術曰列粟米共數以粟斛價乘之得十二貫七百七十二文五分以減直錢

餘六貫六百三十三文五分為實列粟米斛價相減餘八十九文為法實如法而一得米反減共數餘即粟也合問

今有金瓶一十二隻銀瓶一十五隻秤之重適等交換一隻而秤之金輕五兩七錢半問二色各一重幾何
答曰金瓶一隻重二十八兩七錢半○銀瓶一隻重二十三兩

術曰列置五兩七錢半上倍十五乘之下位十二乘之各自為實列金銀瓶以



術曰列該長二十八步加入矢闊一十四步共得四十二步以矢闊一十四步乘之折半得二百九十四步為田積也以畝法二百四十步約之合

今有錢田一段外周一百八步內池方九步問為田幾何

答曰三畝七分一釐二毫半

術曰列外周自乘得一萬一千六百六十四以十二除之得九百七十二步寄位又列池方九步自乘得八十一以減寄位餘八百九十一為田積

步以畝法二百四十步約之合問

今有方田一段自方八十四步內有圓池周

術曰列八十四步自乘得七千五百三十六步寄位又列池周步自乘得二萬七百三十六以十二而一得一千七



百二十八步為池積以減寄位餘五百三十二八為田積以畝法除

今有三斜田一段大斜七十五步中斜六十六步小斜四十五步中股長三十六步問為田幾何

答曰五畝六分二釐半

術曰列大斜七十五步以中股長三十六步乘之得二千七百步折半得一千三百五十為田積步以畝法除

今有椽田一段中闊三十四步長二百八十六步問為田幾何

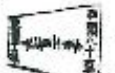
答曰二十三畝一分七釐半

術曰列中闊折半得一十七步以長一百八十六步乘之得三千一百六十二為田積步以畝法而一合問

今有方五斜七八角田一段只二尋而闊三十八步問為田幾何

答曰一十六畝

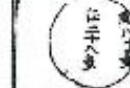
今有梯田一段東闊四十六步西闊八十六步長一百二十五步問為田幾何



術曰列東闊併入西闊半之得六十六步為停闊以長步乘之得八千二百五十為田積步以畝法而一合問為田幾何

答曰六畝五分八釐七毫半

今有圓田一段周八十四步以徑二十八步問為田幾何



術曰列周八十四步以徑二十八步乘之得二千三百五十一以四而一得五百八十八為田積步以畝法而一合問

今有圓田一段不記周步只云徑一十六步問為田幾何



術曰列徑一十六步自乘得二百五十六三之四而一得一百九十二為田積步以畝法除之合問

答曰一畝一釐二毫半

今有圓田一段不記徑步只云周五十四步問為田幾何



術曰列周五十四步自乘得二千九百一十六以十二而一得二百四十二為田積步以畝法而一合問

答曰三畝二分五釐半

今有圓田一段周六十四步以徑三十三步乘之得二千一百一十二以四而一得五百二十八為田積步以畝法而一合問

答曰一畝二分五釐半

古法圓率 周三尺 徑一尺	劉徽新術 周一百五十七尺 徑五十五尺	沖之密率 周二十二尺 徑七尺	明吳名缺 二分之二為大半 四分之二為大半	四分之二為大半	明正負術 其同名相減 則異名相加 正無人負之	負無人正之	其異名相減 則同名相加 正無人正之	負無人負之	明乘除段 長平相併曰和 長平相減曰較
-----------------	-----------------------	-------------------	-------------------------	---------	---------------------------	-------	-------------------	-------	-----------------------

長平相乘曰積	自相乘之曰累	同名相乘為正	異名相乘為負	平除長為小長	長除平為小平	小長平相併曰小和	小長平相減餘小較	小長平相乘得一步為小積	明開方法	置積為實及方廉同加異減開之	新編算學啓蒙總括終
--------	--------	--------	--------	--------	--------	----------	----------	-------------	------	---------------	-----------

新編算學書目錄

計三卷共二十門 凡二百五十九頁

上卷八門 一百一十三頁

縱橫因法門 八門 身外加法門 十一
 留頭乘法門 二十 身外減法門 十一
 九歸除法門 二十 異乘同除門 八門
 庫務解稅門 十二 折學及差門 十五
 中卷七門 七十一頁
 微形段門 十六 介同符乘門 九

差分均配門 十門 求差分和門 十
 貴職及率門 八門 商功修業門 十
 下卷五門 七十五頁

之分齊同門 九門 堆積運源門 十
 盈不足術門 九門 方程正負門 九
 開方釋鎖門 四門

新編算學書目錄終

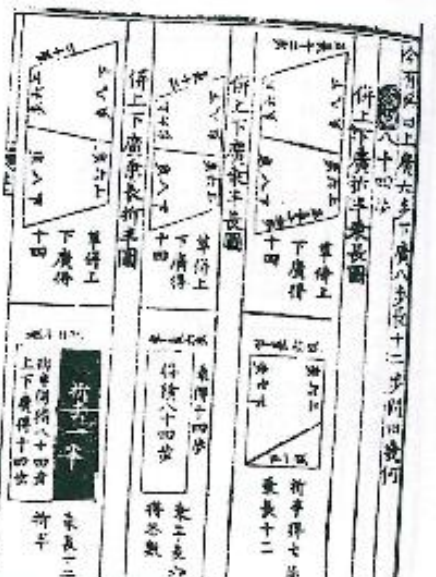
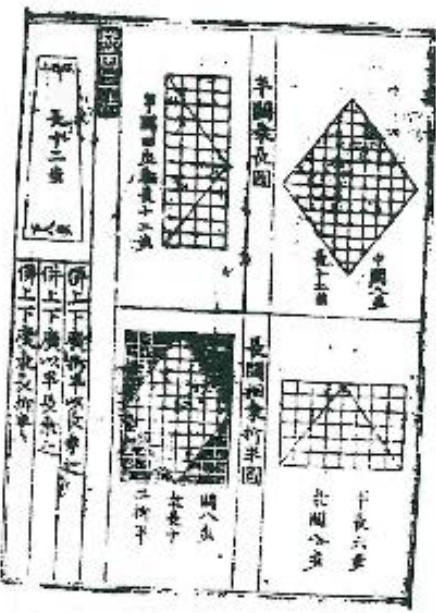
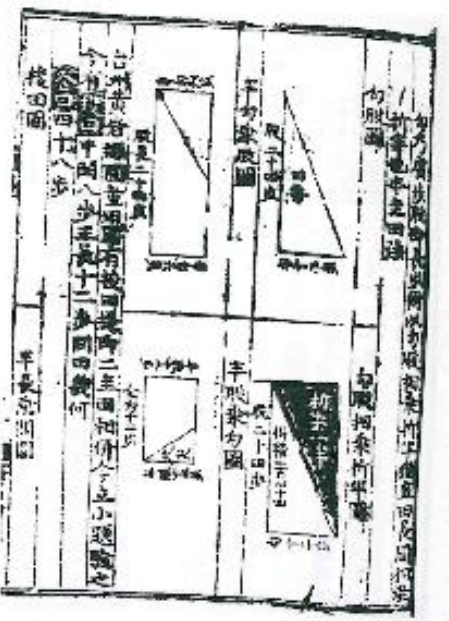
新編算學書目錄終

釋九數法

一一如一 一二如二 三三如三
 二五如六 四四如四 二四如八
 四四如一十六 一五如五 二五如十
 三五如一十五 四五如二 五五如二十五
 一六如六 二六如一十二 五六如三十
 四六如二十四 五六如三十 六六如三十六

一七如七 二七如十四 三七如二十一
 四七如二十八 五七如三十五 六七如四十二
 七七如四十九 一八如八 二八如一十六
 三八如二十四 四八如三十二 五八如四十
 六八如三十八 七八如五十六 八八如六十四
 一九如九 二九如一十八 三九如二十七
 四九如三十六 五九如四十五 六九如五十四
 七九如六十三 八九如七十二 九九如八十一
 九歸除法 按古法多屬簡便者初學者宜
 後人以法代之即特反術





圖三十一 田賦比較上

一、田賦之種類

田賦之種類，可分爲直接賦與間接賦二種。直接賦者，如地租、地價稅、土地稅等。間接賦者，如地價附加稅、土地附加稅等。

二、田賦之計算

田賦之計算，可分爲直接賦與間接賦二種。直接賦之計算，以土地之面積與地價爲標準。間接賦之計算，以土地之面積與地價附加稅率爲標準。

三、田賦之負擔

田賦之負擔，可分爲直接負擔與間接負擔二種。直接負擔者，由土地所有權人負擔。間接負擔者，由土地所有權人與土地利用人共同負擔。

四、田賦之影響

田賦之影響，可分爲經濟影響與社會影響二種。經濟影響者，如田賦之增加，將導致土地所有權人減少投資，進而影響農業生產。社會影響者，如田賦之增加，將導致土地所有權人減少消費，進而影響社會福利。

圖三十二 田賦比較上

一、田賦之種類

田賦之種類，可分爲直接賦與間接賦二種。直接賦者，如地租、地價稅、土地稅等。間接賦者，如地價附加稅、土地附加稅等。

二、田賦之計算

田賦之計算，可分爲直接賦與間接賦二種。直接賦之計算，以土地之面積與地價爲標準。間接賦之計算，以土地之面積與地價附加稅率爲標準。

三、田賦之負擔

田賦之負擔，可分爲直接負擔與間接負擔二種。直接負擔者，由土地所有權人負擔。間接負擔者，由土地所有權人與土地利用人共同負擔。

四、田賦之影響

田賦之影響，可分爲經濟影響與社會影響二種。經濟影響者，如田賦之增加，將導致土地所有權人減少投資，進而影響農業生產。社會影響者，如田賦之增加，將導致土地所有權人減少消費，進而影響社會福利。

圖三十三 田賦比較上

一、田賦之種類

田賦之種類，可分爲直接賦與間接賦二種。直接賦者，如地租、地價稅、土地稅等。間接賦者，如地價附加稅、土地附加稅等。

二、田賦之計算

田賦之計算，可分爲直接賦與間接賦二種。直接賦之計算，以土地之面積與地價爲標準。間接賦之計算，以土地之面積與地價附加稅率爲標準。

三、田賦之負擔

田賦之負擔，可分爲直接負擔與間接負擔二種。直接負擔者，由土地所有權人負擔。間接負擔者，由土地所有權人與土地利用人共同負擔。

四、田賦之影響

田賦之影響，可分爲經濟影響與社會影響二種。經濟影響者，如田賦之增加，將導致土地所有權人減少投資，進而影響農業生產。社會影響者，如田賦之增加，將導致土地所有權人減少消費，進而影響社會福利。

圖三十四 田賦比較上

一、田賦之種類

田賦之種類，可分爲直接賦與間接賦二種。直接賦者，如地租、地價稅、土地稅等。間接賦者，如地價附加稅、土地附加稅等。

二、田賦之計算

田賦之計算，可分爲直接賦與間接賦二種。直接賦之計算，以土地之面積與地價爲標準。間接賦之計算，以土地之面積與地價附加稅率爲標準。

三、田賦之負擔

田賦之負擔，可分爲直接負擔與間接負擔二種。直接負擔者，由土地所有權人負擔。間接負擔者，由土地所有權人與土地利用人共同負擔。

四、田賦之影響

田賦之影響，可分爲經濟影響與社會影響二種。經濟影響者，如田賦之增加，將導致土地所有權人減少投資，進而影響農業生產。社會影響者，如田賦之增加，將導致土地所有權人減少消費，進而影響社會福利。

Zhu Shijie and His *Suanxue qimeng* (SQ)

- Zhu Shijie (朱世傑) of thirteenth-century Yuan dynasty, whose *Siyuan yujian* (四元玉鑑, *Precious Mirror of the Four Elements*, 1303) is regarded as representing the zenith of Chinese mathematics, came from some place near present-day Beijing. Yet nothing significant to his life can be traced back.
- *Suanxue qimeng* was printed in 1299 and disappeared thereafter in China for more than five hundred years. In 1839 Qing Chinese scholar Luo Shilin (羅士琳) published an annotated version based on the Korean edition. And in what follows we can see the scan of a few pages of both Korean and Chinese editions.

-

Suanxue qimeng (SQ)

- The *Suanxue qimeng* (Introduction to Mathematical Study) has three chapters, divided into 20 sections and 259 problems.
- Starting from computation methods for multiplication and division and goes on to root extraction and the method of *tian yuan* (天元術, celestial element) – that is, solving polynomial equations). It includes almost all of the various aspects and content of mathematics as a branch of science of that time.
- This book, a complete work going from the simple to the difficult, is indeed a very good textbook as an “introduction” (qimeng, 啟蒙). This may in part explain why Korean people used it, among others, to train their *Chungin* mathematicians (中人算學者).

Suanxue qimeng (SQ)

- Contents and multiplication table (目錄與釋九數法) (p. 102)
- Pi for ancient method (古法圓率) (p. 105)
- Various 2-D diagrams and their area formulas such as trapezoid (梯田), isosceles triangle (圭田), triangle (三斜田), and octagon (方五斜七八角田) (pp. 124-125)

新編算學書目錄

計三卷共二十門 凡二百五十九頁

上卷八門 一百一十三頁

縱橫因法門 八門 身外加法門 十一
 留頭乘法門 二十 身外減法門 十一
 九歸除法門 二十 異乘同除門 八
 庫務解稅門 十二 折學及差門 十五
 中卷七門 七十一頁
 微形段門 十六 介同符乘門 九

差分均配門 十門 求差分和門 十
 貴職及率門 八門 商功修業門 十
 下卷五門 七十五頁
 之分齊同門 九門 堆積運源門 十
 盈不足術門 九門 方程正負門 九
 開方釋鎖門 四門

新編算學書目錄終

新編算學書目錄

釋九數法

一一如一 一二如二 三三如三
 二五如六 四四如四 二四如八
 四四一十六 一五如五 四五二十
 三五一十五 四五二十 五五二十五
 一六如六 二六一十二 六六三十六
 四六二十四 五六三十 六六三十六

一七如七 二七一十四 三七二十一
 四七二十八 五七三十五 六十七
 七七四十九 一八如八 二八一十六
 七八四十八 四八三十二 五八四十四
 六八四十八 七八五十六 八八六十四
 一九如九 二九一十八 三九二十七
 四九三十六 五九四十五 六九五十四
 七九六十三 八九七十二 九九八十一
 九歸除法 按古法多用簡便者初學者宜



術曰列較長二十八步加入矢闊一十四步共得四十二步以矢闊一十四步乘之折半得二百九十四步為面積也以前法二百四十步約之合問

今有錢田一段外周一百八步內池方九步問高田幾何

答曰三兩七分一厘二毫半

術曰列外周自乘得一萬二千六百六十四以十二除之得九百七十二步寄位又列池方九步自乘得八十一以減

寄位餘八百九十一為田積步以前法二百四十步約之合問

今有方田一段自方八十四步內有圓池周

術曰列八十四步自乘得七千五百三十六步寄位又列池周步自乘得二萬七百三十六以十二而一得一千七百二十八步為池積以減寄位餘五千三百二十八為田積步以前法除之合問



今有三斜田一段大斜七十五步中斜六十步小斜四十五步中股長三十六步問高田幾何

答曰五兩六分二厘半

術曰列大斜七十五步以中股長三十六步乘之得二千七百步折半得一千三百五十為田積步以前法而一合問

今有棧田一段中淵二十四步長一百八十六步問高田幾何

答曰一十三兩一分七厘半

術曰列中淵折半得一十七步以長一百八十六步乘之得三千一百六十二為田積步以前法而一合問

今有方五斜七八角田一段只云每面淵二十

術曰置淵二十八步上位六之為長下位倍之為廣為長廣相乘得九千四百八十八步方積以二簡四分半除之得二千八百四十為田積步以前法

今有梯田一段東闊四十六步西闊八十六步

長一百二十五步問為田幾何

答曰三十四畝三分七厘半

術曰列東闊併入西闊半之得六十六

步為脩爾以長步乘之得八千二百五

十為田積步以計法而一合問

今有圭田一段長九十三步闊三十四步問為

田幾何

答曰六畝五分八厘七毫半

術曰列長九十三步以闊三十四步乘

之折半得二千五百八十一為田積步

以計法而一合問

今有圓田一段周八十四步徑二十八步問為

田幾何

答曰二畝四分五厘

術曰列周八十四步以徑二十八步乘

之得二千三百五十二以四而一得五

百八十八為田積步以計法而一合問

今有圓田一段不記周步只云徑一十六步問

為田幾何

答曰八分

術曰列徑一十六步自乘得二百五十

六三之四而一得一百九十二為田積

步以計法除之合問

今有圓田一段不記徑步只云周五十四步問

為田幾何

答曰一畝一厘三毫半

術曰列周五十四步自乘得二千九百

二十六以十二而一得二百四十三步

為田積也以計法而一合問

今有斷田一段下周六十四步徑三十三步問

為田幾何

答曰二畝二分

術曰列周六十四步以徑三十三步乘

之得二千一百一十二以四而一得五

百二十八為田積步以計法二百四十

步除之得四畝四分合問

今有弧田一段矢闊一十四步弦長二十八步

問為田幾何

答曰一畝二分二厘半

Suanxue qimeng (SQ)

- Chicken and rabbit in the same cage (雞兔同籠, *Kikaku* in Japanese) (p. 130)
- Truncated pyramid with square base (方亭臺)、truncated cone (圓亭臺): volume formula (p. 140)
- Gaussian elimination method for solving system of linear equations (方程正負門) (p. 153)
- Unlocking the method for solving equations (開方釋鎖門) (pp. 157, 159)

開方釋鎖門三十四問

今有平方葦四千九十六步，問為方面幾何？

答曰六十四步。

術曰：列葦四千九十六步為實，借一算於六步之下，名曰廉法。常起一位至百步下，止乃上商六十於廉法之上，實數之下亦置六百名曰方法。乃命上商除實三千六百實餘四百九十六倍方法得一千二百一，退得一百二十廉法再退又上商四步於廉法之上，實數之下亦置四步方法得

於廉法之上實數之下亦置四步方法得

一百二十四乃命上商除實恰盡合問。

面幾何？

答曰二十六尺。

術曰：列葦一萬七千五百七十六尺為實，借一算於六尺之下，名曰廉法。常起二位約實至千尺下止，乃上商二十以隅法因上商二十得二千於隅法之上，方法之下名曰廉法。又廉法因上商二十得四千於廉法之上，實數之下名曰方法。乃命上商

除實八千實餘九千五百七十六以隅法

因上商二十加入廉法又廉法因上商二十加入方法又隅法因上商二十加入廉法方法得一萬二千廉法得六千方法一退廉法再退隅法三退結又上商六尺以隅法因上商六尺加入廉法又廉法因上商六尺加入方法得一千五百九十六乃命上商除實恰盡合問。

之一問為平方面幾何？

今有積五萬九千四百一十四步一十六分步

之一問為平方面幾何？

答曰二百四十三步四分步之三。

術曰：列全步通分內子得九十五萬六千二百五十五萬實以一萬為平方開之得九百七十五分也。又列分母為實一萬為平方開之得四根除得二百四十三步不滿法者命之合問。

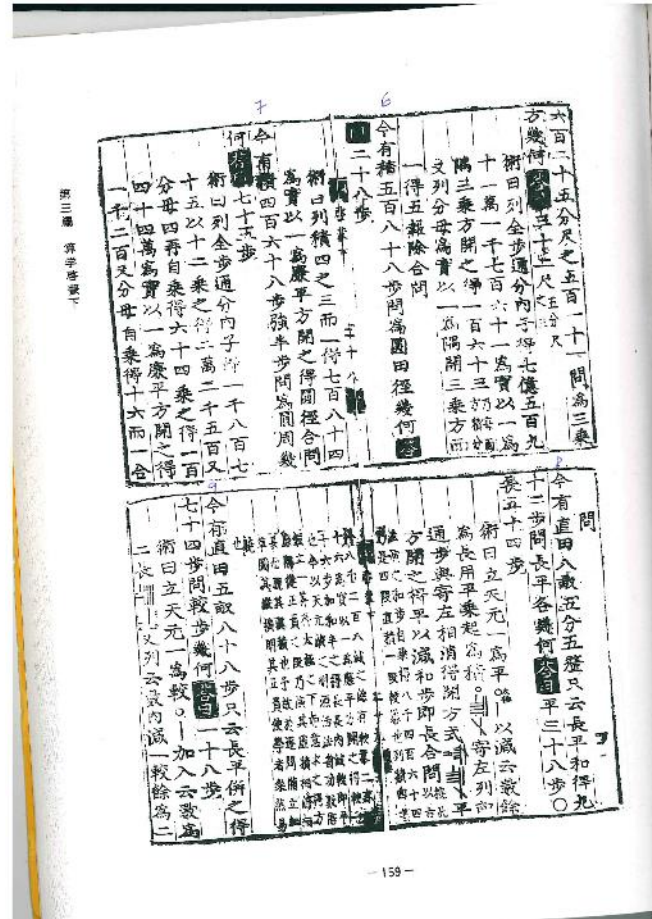
今有積一十三萬三千七百六十八尺三百四

十三分尺之二百八十八問為

立方面幾何？

答曰五十一尺七分尺之一。

Problem Solving in terms of the method of *tianyuan* in SQ



術曰列全步通分內子得四千五百八十八萬二千七百一十二為實以一為隔立方開之得三百五十八方步又列分母為實一為隔立方開之得七報除不滿法者合分合問

今有積一百一十二萬九千四百五十八尺六百二十五分尺之五百一十一問為三乘方幾何

答曰三十二尺五分尺之三

術曰列全步通分內子得七億五百九十

一萬一千七百六十一為實以一為隔三

乘方開之得一百六十三方步又列分

母為實以一為隔開三乘方而一得五報

除合問

今有積五百八十八步問為圓田徑幾何

答曰二十八步

術曰列積四之三而一得七百八十四萬

實以一為廉平方開之得圓徑合問

今有積四百六十八步強半步問為圓田幾何

答曰七十五步

術曰列全步通分內子得一千八百七十五以十二乘之得二萬二千五百又分母四再自乘得六十四乘之得一百四十四萬為實以一為廉平方開之得一千二百又分母自乘得十六而一合問

今有直田八步五分五釐只云長平和得九十二步問長平各幾何

答曰 平三十八步 長五十四步

術曰立天元一為平。一以減云數餘為

長用平乘起為積。一寄左列步通步

與寄左相消得開方式。一平方開之

得平以減和步即長合問。一按此以古法

入下四百六十四方步。一按此以古法

按此以古法。一按此以古法

按此以古法。一按此以古法

按此以古法。一按此以古法

按此以古法。一按此以古法

按此以古法。一按此以古法

按此以古法。一按此以古法

按此以古法。一按此以古法

按此以古法。一按此以古法

按此以古法。一按此以古法

按此以古法。一按此以古法

按此以古法。一按此以古法

按此以古法。一按此以古法

按此以古法。一按此以古法

按此以古法。一按此以古法

按此以古法。一按此以古法

按此以古法。一按此以古法

按此以古法。一按此以古法

按此以古法。一按此以古法

按此以古法。一按此以古法

按此以古法。一按此以古法

按此以古法。一按此以古法

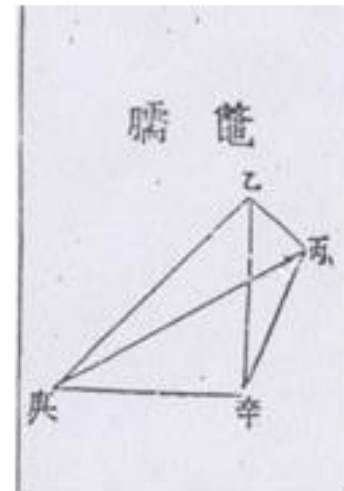
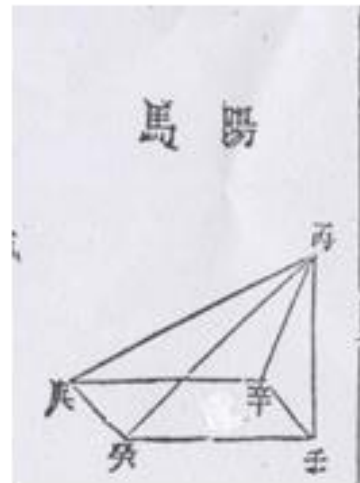
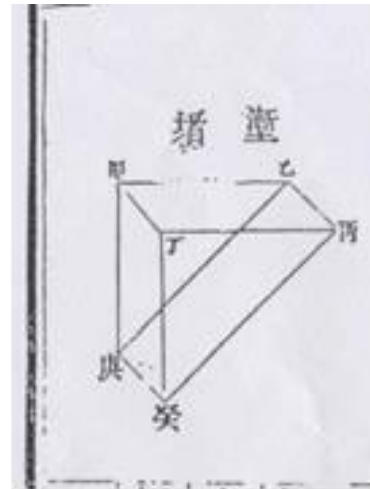
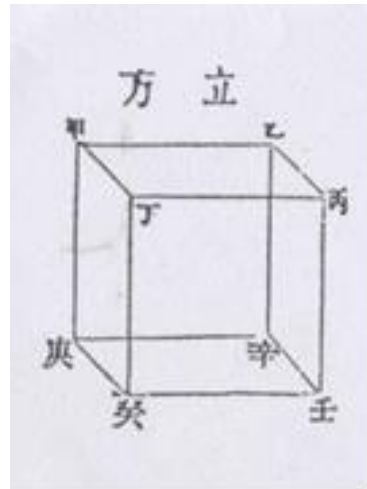
按此以古法。一按此以古法

按此以古法。一按此以古法

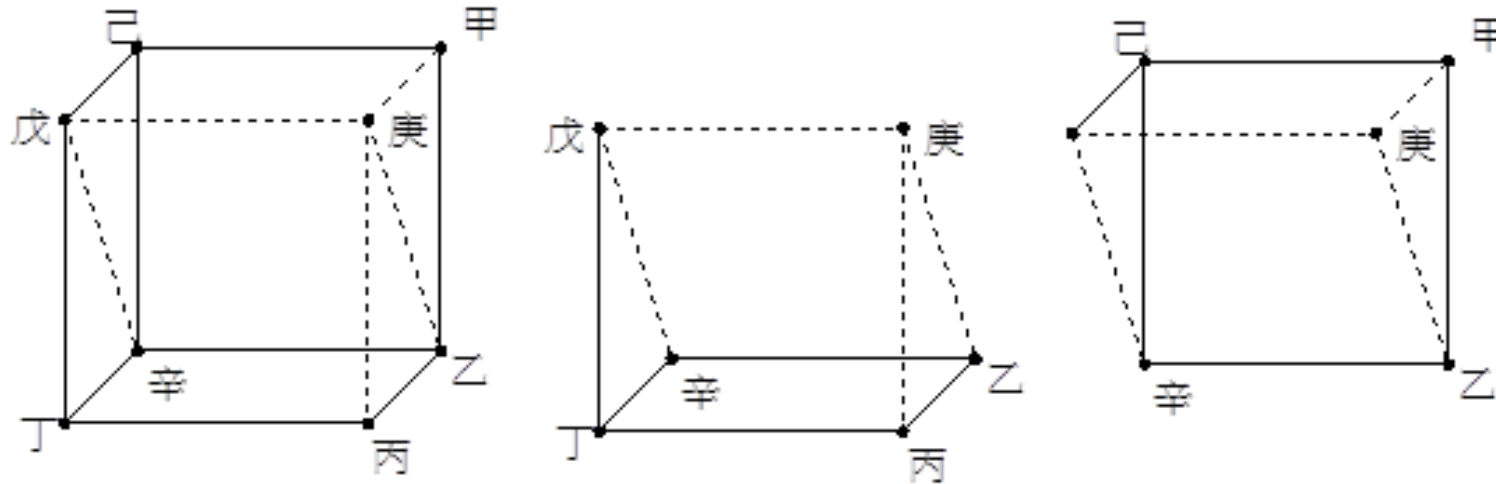
按此以古法。一按此以古法

按此以古法。一按此以古法

Graphical Illustration: Li Huang (李潢, ?-1812), *Jiuzhang suanshu xicao tushuo* (《九章算術細草圖說》)



Dissecting Cube: Kangxi emperor ed., *Shuli jingyun* (Collected Basic Principles of Mathematics, 1723) (康熙主編《數理精蘊》正立方體切割)



Yanghui suanfa vs. Suanxue qimeng

- Both texts contain no 3-D diagrams.
- Following Liu Hui, Yang Hui uses 2-D diagram and out-in principle (以盈補虛或出入相補) as a tool to demonstrate area formula in plane while Zhu Shijie does not show any intention to do similar things.
- In his section of unlocking the method for solving equations, Zhu Shijie presents a systematic exposition of the method of *tianyuan*. The method of setting up equations (setting up the *tianyuan yi*, 立天元一) at that time was some sort of “high tech” which apparently was destined to exert its due influence over Korean and Japanese mathematicians.

- In his *Xiangjie jiuzhang suanfa zuanlei* (詳解九章算法), Yang Hui reorganizes the contents of the nine chapters into a coherent system by designing a new standard of classification, indicating the significance of the method rather than the problem *per se*, which never be tried again by any Chinese mathematicians. And since it was not introduced to Korea and Japan, the text did not have a chance to make influence over the two neighbors.
- Due to their influence, the nine chapters in China and their versions in Korea, Japan (?) and Vietnam came to form a textual community (九章文本社群), a term from Scott Montgomery who regards the role played by say Ptolemy's *Almagest* in the Middle Age Europe.

Contents of *Jiuzhang suanshu* (The Nine Chapters) 《九章算術》

- Chapter One *Fangtian* (方田): simplifying fractional numbers (a Chinese version of Euclidean algorithm), arithmetical operations of fractional numbers, area formulas.
- Sumi (粟米): 比例計算，例如今有術，已知 $a : b = c : x$ ，求 x
- Cuifen (衰分): 比例分配
- Shaoguang (少廣): 開平方，開立方，球體積公式
- Shangong (商功): 體積公式，例如陽馬術.
- Jungshu (均輸): 複比例問題
- Yingbuzu (盈不足): 一次方程的算術解法，例如盈不足術
- Fangcheng (方程): 多元一次方程聯立消元解法，例如方程術，正負術
- Gougu (勾股): 勾股定理及其測量運用

Classification of the Nine Chapters

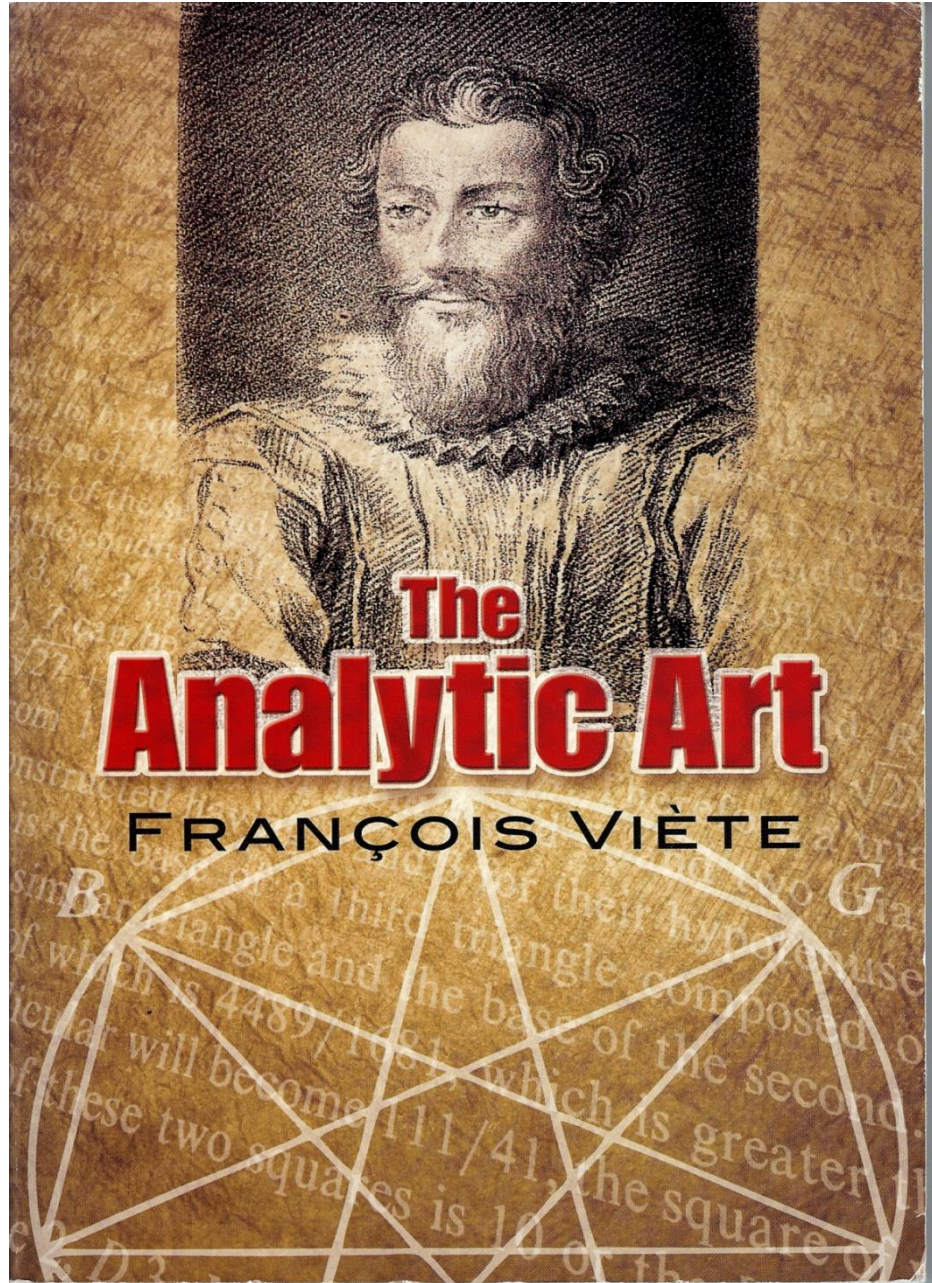
- The first six chapters were edited according to the characteristic of problems such as those of area measurement in chapter one while in the last three chapters the unknown editors put problems which are solved by the same method such as the method of *fangcheng* (Chapter 8) into the same chapter. 前六章按問題性質分類，後三章按數學方法（所謂『術』）分類。

Yang Hui's New Classification of the "Nine Chapters"

- 楊輝：「…殊不知〔九章〕所傳之本，一部的其真矣。如粟米章之互換，少廣章之求由開方，皆重疊無所謂，而作者題問的不歸章次亦有之。今作纂類互見目錄，以辨其訛，後之明者更為詳釋，不亦善乎。」
- 乘除第一：共40問，方田38+粟米2
- 互換第二：共55問，粟米31+衰分11+均輸11+盈朒（不足）2
- 合率第三
- 分率第四
- 衰分第五
- 壘積第六
- 盈不足第七
- 方程第八
- 句股第九

HPM: Examples

- Analogy (比類) in Yang Hui's mathematics: Reasoning analogously!
- An echo to Liu Hui's reasoning (this) "class" by (that similar) class (以類推類)?
- Chicken and rabbit in the same cage (*kikaku* 雞兔同籠): synthesis (算術) vs. analysis (代數) and why Viete's classic in algebraic symbolism entitled as "analytic art"?
- How HPM and HM (History of Mathematics) can be beneficial to each other.



Hermeneutics

- **How teachers implement these endeavors into their classes?**
- **I would recommend, as Masami Isoda suggests for the theme of the math education session, an approach underlying which hermeneutics plays a key role.**
- **Hermeneutic circles: Jahnke's version**
- **Hermeneutic tetrahedron**

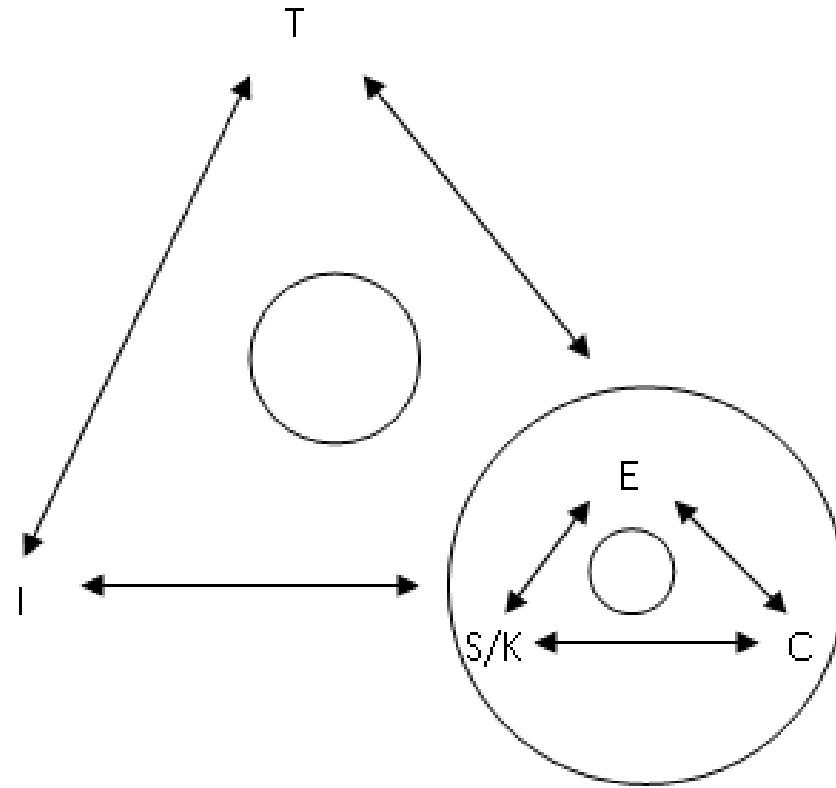


Diagram 2: A hermeneutic twofold circle for teacher's teaching by means of textbook. T: teacher; I: teacher's interpretation of textbook's contents; E: editors of the textbook; S/K: curriculum standard and related mathematical knowledge; C: content knowledge.

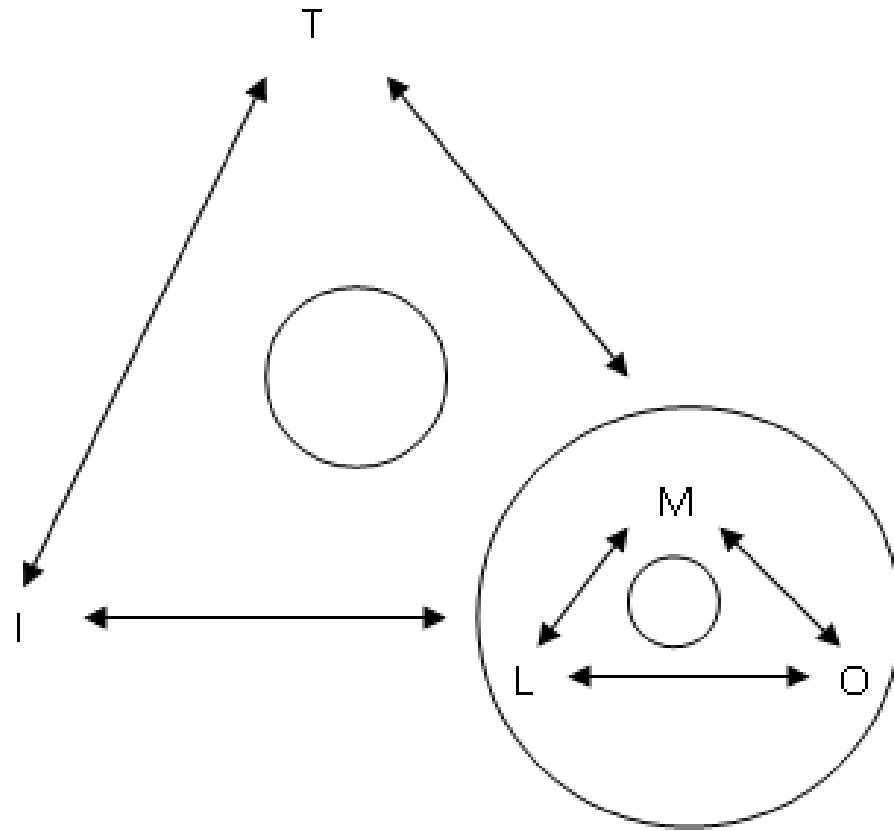


Diagram 3. Integrating history of mathematics into hermeneutic twofold circle. T: mathematics teacher; I: interpreting textbook contents; M: ancient mathematicians; L: mathematical theories; O: mathematical objects.

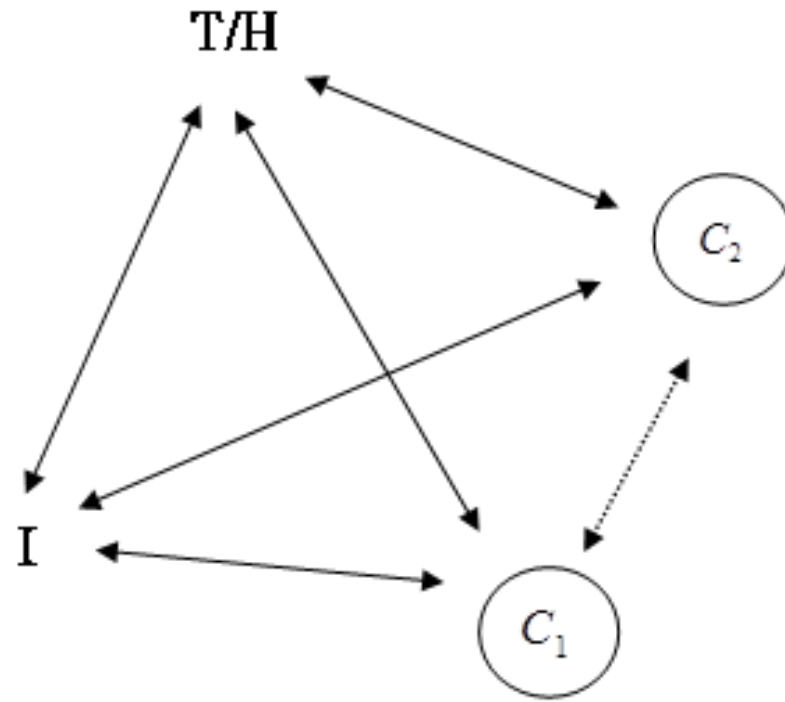


Diagram 4. Hermeneutic Tetrahedron. C_1 : Primary circle for textbook editors, curriculum standard / mathematical theories and content knowledge. C_2 : Primary circle of Jahnke's hermeneutic model.

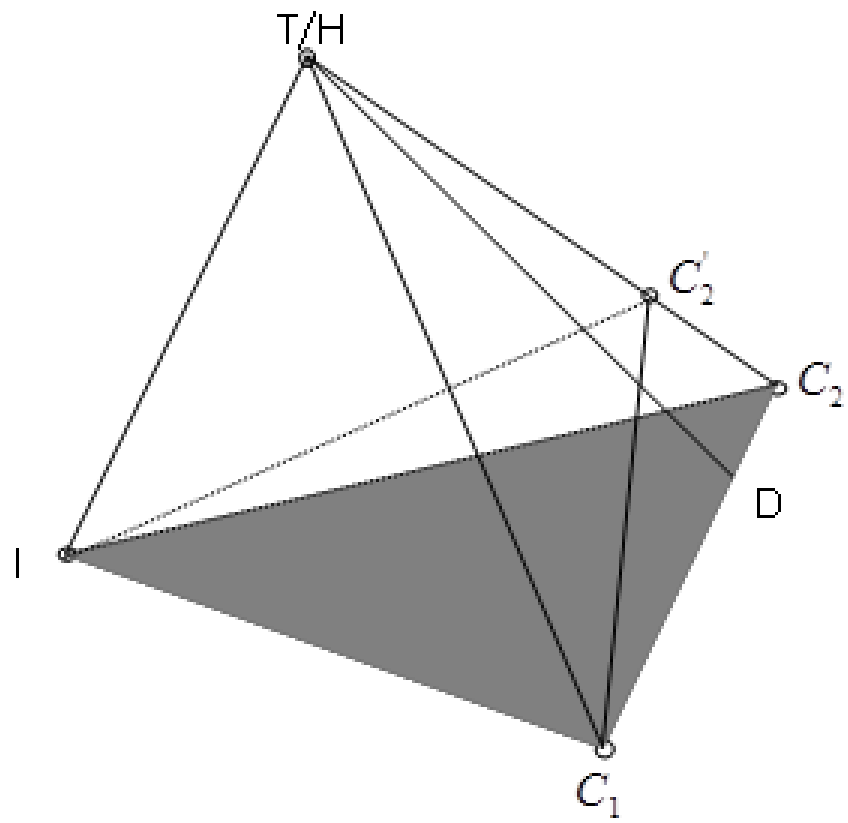


Diagram 5. Hermeneutic Tetrahedron Model

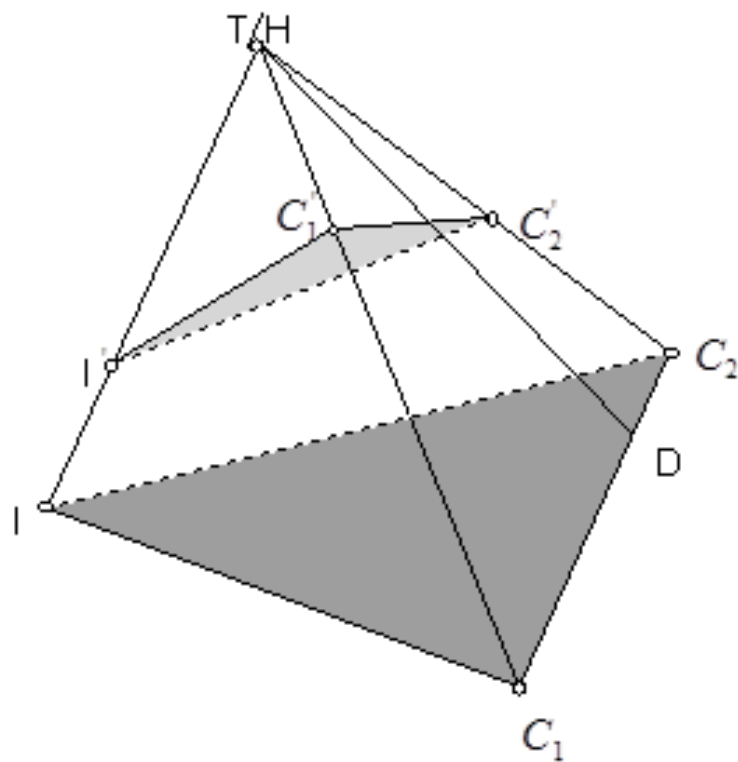


Diagram 6. Cross Section of the Hermeneutic Tetrahedron.

HPM: Examples

- **Analogy (比類) in Yang Hui's mathematics: Reasoning analogously!**
- **Chicken and rabbit in the same cage (*kikaku* 雞兔同籠): synthesis (算術) vs. analysis (代數) and why Viete's classic in algebraic symbolism entitled as "analytic art"?**
- **How HPM and HM (History of Mathematics) can be beneficial to each other.**

A Story of Yu

- **How and Why a (senior high school) teacher can accommodate himself/herself to be both teacher and historian?**

Hermeneutic approach and Pedagogical Reflection

- **Teachers would firstly engage the students to read carefully the texts in the history of mathematics, then helped them to understand the meaning of the contents, and finally sought to make sense of the texts in terms of their historical contexts.**
- **Analogy/contrast between teaching situations and historical context.**
- **The teachers are encouraged to consult not only the students' cognitive issues but also the historical "stranger's" view of doing mathematics which is often difficult to make sense even with historian's expertise.**

Mingde Team from New Taipei City

- Yu-Fen Chen and her team at the Mingde Senior High School at New Taipei City.
- Yu-Fen is one of my former graduate students and her master thesis is an HPM study of junior high school geometry curriculum by a reference to Euclid's *Elements*.

References

- Dauben, Joseph, Xu Yibao and Guo Shuchun (2013). *Nine Chapters on the Art of Mathematics*. Shenyang: Liaoning Education Press.
- Horng, Wann-Sheng (2004). “Teacher’s Professional Development in terms of the HPM: A Story of Yu”, presented to 2004 HPM, Uppsala, Sweden.
- Isoda, Masami (2002). “Hermeneutics for Humanizing Mathematics Education”, *Tsukuba Journal of Educational Studies in Mathematics* 21.
- Jahnke, Hans Niels (1994) “The Historical Dimension of Mathematical Understanding: Objectifying the Subjective”, *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education vol. I*, Lisbon: University of Lisbon, pp. 139-156.

- **Jahnke, Hans Niels *et al.*, (2000). “The Use of Original Sources in the Mathematics Classroom”, in Chapter 9 of John Fauvel and Jan van Maanen (eds.), *History in Mathematics Education*, Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers, pp. 291-728.**
- **Li Yan and Du Shiran (1987). *Chinese Mathematics: A Concise History*. Oxford: Clarendon Press.**
- **Martzloff, Jean-Claude (1997). *A History of Chinese Mathematics*. Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag.**