2005/12/21
千葉県立佐原高等学校

授 業 資 料

数三角形とパスカルの数学

パスカル（エドランク作の版画）

2 年　　組　　番
氏名

授業者：岩井　剛
（筑波大学大学院修士課程教育研究科教科教育専攻数学教育コース１年）

前回の復習

帰結第 12

　あらゆる数三角形において、同じ**底辺**にあって**隣接する 2 つの細胞**のうち、**上位の細胞**と**下位の細胞**との**比**は、上位の細胞から底辺の**最上段**までの**細胞の個数**（両端の細胞を含む）と、下位の細胞から**最下段**までの**細胞の個数**（両端の細胞を含む）との**比**に等しい。

５．パスカルの証明

　この命題（帰結第 12）には**無限に多くの場合**があるが、私は **2 つの補題**を仮定することによって、きわめて短い証明を与えよう。

補題 1. これは自明であるが、帰結第 12 は第 2 底辺において成り立つ。なぜならば、φ（ファイ）とσとの比が 1 と 1（細胞の個数）との比に等しいことは極めて明らかである。

補題 2. もし帰結第 12 が**任意のある**底辺において成り立つならば、それは必然的に次の底辺においても成り立つ。

　ここから、帰結題 12 が必然的に**すべての底辺において成り立つ**ことがわかる。なぜならば、補題 1 によって、帰結第 12 は第 2 底辺において成り立つ。故に、補題 2 によって、それは第 3 底辺において成り立つ。故に、第 4 底辺においても成り立つ。**以下限りなく同様**である。

この**証明法**は　　　　　　　　　　　　　だ！

この証明法はパスカルによって導入された！

証明のつづき…

　故に、補題 2 のみを証明すればよい。それには次のようにする。

　いま、帰結第 12 が任意のある底辺、例えば第 4 底辺D　　λ（ラムダ）において成り立つとする。すなわち、DとBとの比が①＿＿＿と②＿＿＿との比に、Bとθとの比が 2 と 2 との比に、θとλとの比が③＿＿＿と④＿＿＿との比にそれぞれ等しいとする。そのとき、帰結第 12 が次の底辺H　　μ（ミュー）においても成り立ち、例えばEとCとの比は 2 と 3 との比に等しくなることを示す。

　なぜならば、仮定によって、DとBとの比は①＿＿＿と②＿＿＿との比に等しい。

故に、D＋BとBとの比は①＿＿＿＋②＿＿＿と②＿＿＿との比に等しい。

　　　⑤＿＿＿とBとの比は　⑥＿＿＿と②＿＿＿との比に等しい。

　同様に、仮定によって、B とθとの比は 2 と 2 との比に等しい。

故に、B＋θと B との比はと 2＋2 と 2 との等しい。

⑦＿＿＿とBとの比は　4　と　2　との比に等しい。

ところで、BとEとの比は②＿＿＿と⑥＿＿＿との比に等しい。

　故に、複合比によって、CとEとの比は、⑧＿＿＿と⑨＿＿＿との比に等しい。証明終。

　残るすべての場合についても、**同様に**して同じことが示される。というのも、この証明は、帰結第 12 が直前の底辺において成り立つということと、各細胞は直前の細胞と直上の細胞との和に等しいということのみにもとづいているが、このことは至るところにおいて真なのであるから。

・・・疑問に思うことはありませんか？

６．問題（ワークシートにお答えください。）

１．パスカルの証明は、現代の（皆さんが学んだ）数学的帰納法による証明と同じものと言えますか。

2. パスカルはなぜ数学的帰納法を導入したのでしょうか。

3. 数学的帰納法が導入されたことで、何が可能になりましたか。

付録　帰結

〈 帰結第 1 〉

すべての数三角形において、第 1 水平行および第 1 垂直行のすべての細胞は母細胞と同じである。

〈 帰結第 2 〉

すべての数三角形において、各細胞は、その直前の水平行の、その垂直行から第 1 垂直行まで（それらの垂直行を含めて）のすべての細胞の和に等しい。

〈 帰結第 3 〉

すべての数三角形において、各細胞は、その直前の垂直行の、その水平行から第 1 垂直行まで（それらの水平行を含めて）のすべての細胞の和に等しい。

〈 帰結第 4 〉

すべての数三角形において、各細胞から単位数を引いたものは、その細胞の水平行と垂直行との間（その水平行と垂直行は除く）に含まれたすべての細胞の和に等しい。

〈 定義 〉
同じ底辺の細胞で、その両端から等距離にあるものを、「相反細胞（reciproques）」という。例えば E と R など。

〈 帰結第 5 〉
すべての数三角形において、各細胞はその相反細胞に等しい。

〈 帰結第 6 〉
すべての数三角形において、同じ指数をもつ水平行と垂直行とは、たがいにまったく同じ細胞からなっている。

〈 帰結第 7 〉
すべての数三角形において、各底辺の細胞の和は、その直前の底辺の細胞（の和）の 2 倍である。

〈 帰結第 8 〉
すべての数三角形において、各底辺の細胞の和は、単位数で始まる公比 2 の等比級数の 1 項であり、その指数は底辺の指数と同じである。

〈 帰結第 9 〉
すべての数三角形において、各底辺（の細胞の和）から単位数を引いたものは、それより前のすべての底辺（の細胞）の和に等しい。

〈 帰結第 10 〉
すべての数三角形において、或る底辺の 1 端から始めて連続した細胞を欲するだけとれば、その和は、直前の底辺中の同じ個数の細胞に、同じ個数より 1 個だけ少ない細胞を加えたものに等しい。

〈 定義 〉
直角を 2 等分して対角線上にひいた線上にある細胞、例えば、G、φ、C、 ρ などを、分割線上の細胞という。

〈 帰結第 11 〉

分割線上の各細胞は、その水平行または垂直行における直前の細胞の 2 倍である。

〈 帰結第 12 〉

あらゆる数三角形において、同じ底辺にあって隣接する 2 つの細胞のうち、上位の細胞と下位の細胞との比は、上位の細胞から底辺の最上段までの細胞の個数（両端の細胞を含む）と、下位の細胞から最下段までの細胞の個数（両端の細胞を含む）との比に等しい。

〈 帰結第 13 〉

あらゆる数三角形において、同じ垂直行にあって連続する 2 細胞のうち、下位の細胞と上位の細胞との比は、上位の細胞の底辺の指数と、同じ細胞の水平行の指数との比に等しい。

〈 帰結第 14 〉

あらゆる数三角形において、同じ水平行にあって連続する 2 細胞のうち、大きい方の細胞とその直前の細胞との比は、後者の底辺の指数と垂直行の指数との比に等しい。

〈 帰結第 15 〉

あらゆる数三角形において、任意の水平行の細胞の和と、同じ水平行の最後の細胞との比は、この三角形の指数とこの水平行の指数との比に等しい。

〈 帰結第 16 〉

あらゆる数三角形において、任意の水平行（の細胞の和）と、その下の行（の細胞の和）との比は、下の行の指数とその細胞の個数との比が等しい。

〈 帰結第 17 〉

あらゆる数三角形において、任意の細胞にその垂直行のすべての細胞を加えたものと、同じ細胞にその水平行のすべての細胞を加えたものとの比は、それぞれの行において取りだされた細胞の個数の比に等しい。

〈 帰結第 18 〉

あらゆる数三角形において、両端から等距離にある 2 つの水平行（の細胞の和）の比は、それらの細胞の個数の比に等しい。

〈 最後の帰結 〉

あらゆる数三角形において、分割線上にあって連続する 2 細胞のうち、下位の細胞と上位の細胞の 4 倍との比は、上位の細胞の底辺の指数とそれより単位数だけ大きい数との比に等しい。

二日間ありがとうございました。