

LEGO と紙とパソコンと

— コーヒーカップの描く軌跡 —

小杉 亮人

1. はじめに

今回扱う題材はコーヒーカップである。

このコーヒーカップというものは、子供の遊具だと思って侮っていると、とんでもないことになる。特に真ん中にあるハンドルをいい気になって思い切り回すと、乗り終わったときに具合が悪くなったことのある人も多いのではないだろうか。

では、なぜコーヒーカップがそれほどめまいのするアトラクションになるのだろうか。まず遠心力が理由として挙げられるだろう。実際、遠心力は質量・速さの2乗に比例し、半径に反比例する。だからコーヒーカップを思いっきり回し、速く回ると、外に行こうとする力が大きくなり、半径も小さいので強い遠心力を感じることになる。

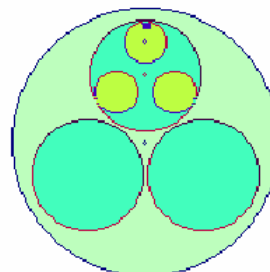
しかし原因はそれだけだろうか。そこで今回はコーヒーカップの描く軌跡に注目する。実はコーヒーカップに乗っている人はとんでもない軌跡を描くことになる。それもめまいを起こす原因になり得るだろう。

「コーヒーカップの描く軌跡」を追跡するために、今回は、LEGO を用いてモデルを作成する。もちろんそれでも再現仕切れない部分はあるだろうが、あくまでイメージをつかむことが目的である。

それをもとに幾何的な処理を施し、可能ならば数式化してみる。そして最後に、コンピュータを用いて、様々な条件下での軌跡をシミュレーションしていきたい。

2. 実際のコーヒーカップ

装置としてのコーヒーカップは大中小三種類の円盤からなっている。どの遊園地も基本的につくりは同じで、大円盤の上に3~4つの中円盤があり、その中円盤1つ1つの上に3つの小円盤が乗っていて、小円盤1つ1つの上にコーヒーカップが乗っている。



実際のコーヒーカップ(写真は多摩動物公園)

2.1. コーヒーカップの動き

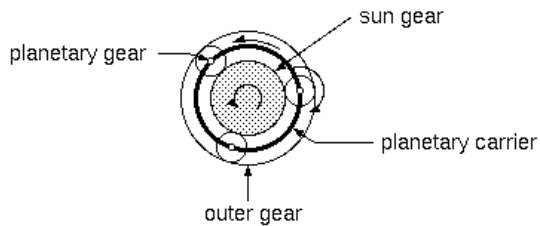
動くときは大円盤と中円盤が自動で回り、小円盤、すなわちコーヒーカップはハンドルで回す仕組みになっている。従って、「回りながら回る」というのがコーヒーカップの動きの特徴である。

2.2. 用いられている機構

実際のコーヒーカップには「遊星歯車機構」という機構が使われていて、その機構によって、「回りながら回る」という動きを得ている。

「遊星歯車機構」とはその名の通り遊星運動(地球が自転しながら太陽の周りを公転するような運動)と同じような運動が得られる機構であり、入力軸と出力軸を同軸上に配置できるのが特徴である。鉛筆削りや自動車のオートマチックにも応用されている。

1つのユニットは、次ページの図のように太陽歯車(sun gear)、遊星歯車(planetary gear)、遊星歯車の公転運動を拾う遊星キャリア(planetary carrier)、外輪歯車(outer gear)の4つの部品から構成されている。

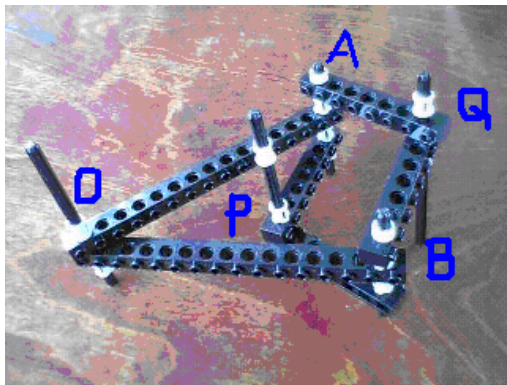


しかし、今回用いる LEGO では、この機構の歯車の組み合わせの部分再現することが難しかったので、この機構自体を再現するのはあきらめて、「回りながら回る」という動きを再現できるような機構を考えた。

3. LEGO で再現するコーヒーカップ

そこで用いたのが「反転変換」という機構である。

3.1. 反転変換



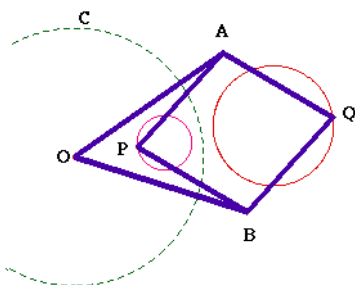
反転変換のつくりとしては、上図において、

- ・ $OA = OB$
- ・ 四角形 $APBQ$ はひし形
- ・ OA, OB は O を中心として固定

であることが条件である。

この機構により、 Q は P の反転した軌跡を得ている(下図参照)。

今回は、モーターや歯車を用いて、 P を等速円運動させ、そのときに Q に取り付けられた円盤上の1点の軌跡を観察する。



3.2. 動力部

次に、反転変換を動かす動力には、下の写真のような LEGO のパーツ、すなわち電源と、モーターと、ウォームギアを用いている。

ウォームギアとは、ねじ歯車(ウォーム)とそれに合うはす歯歯車(ウォームホイール)を組み合わせた機構で、1段で大きな減速比が得られることが特徴である。今回は耐久性を考慮して、これでモーターの回転数を大幅に落としている(ギアなしだと回転が速すぎて LEGO がすぐ外れてしまう)。



ウォームギア
(回転数を落とす)



電源
(単3電池6個で稼働)

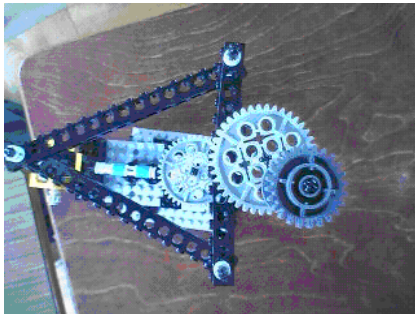
3.3. 完成キット



完成キット



運動の様子



反転変換の都合上、小円盤を再現することはできなかったが、前述の通り小円盤はコーヒーカップ部、すなわち手動なので、自動で動く部分(大円盤と中円盤における「回りながら回る」という動き)については再現できた。

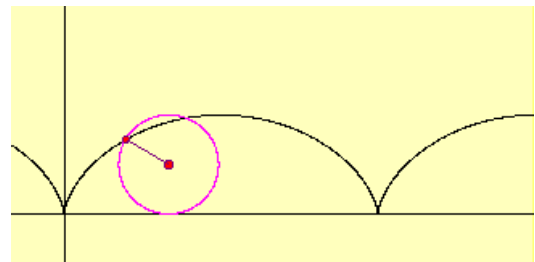
4. コーヒーカップの描く軌跡

このようにLEGOを用いることでかろうじてだがコーヒーカップの動きを再現できたわけだが、これをなんとかして紙の上に表現できないだろうか。

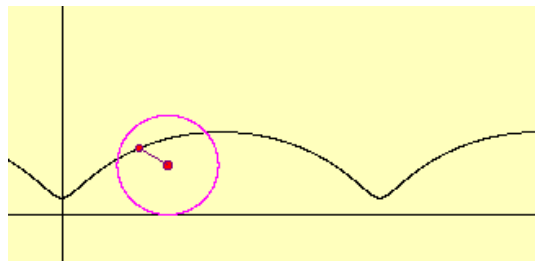
実は、コーヒーカップの描く軌跡はサイクロイドの1種になることが知られている。

4.1. サイクロイド

サイクロイドとは、円が定直線上を滑らないで転がる時、その円周上の定点が描く軌跡のことをいう。^{はいせん}擺線ともいう。

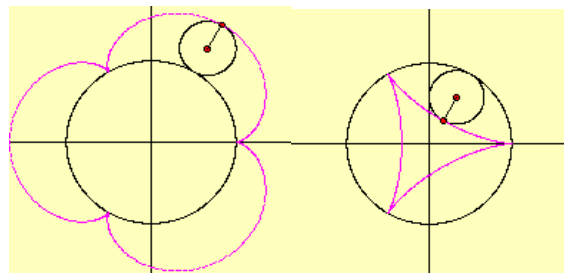


ちなみに、定点が円周上でなくて、円の内部にあたり外部にあたりしても似たような曲線が得られる。これをトロコイドという。サイクロイドはトロコイドの特別な場合といえる。



4.2. 内サイクロイド・外サイクロイド

円が転がる場所を定直線から定円へと変えてみる。そのとき、円が定円の内側を周に沿って転がる時、動円の円周上の定点が描く軌跡を内サイクロイド、定円の外側を転がる時動円の円周上の定点が描く軌跡を外サイクロイドという。



また、定点を動円の外部または内部にとれば、「外トロコイド」「内トロコイド」が得られる。

4.3. 外サイクロイドのパラメータ表示

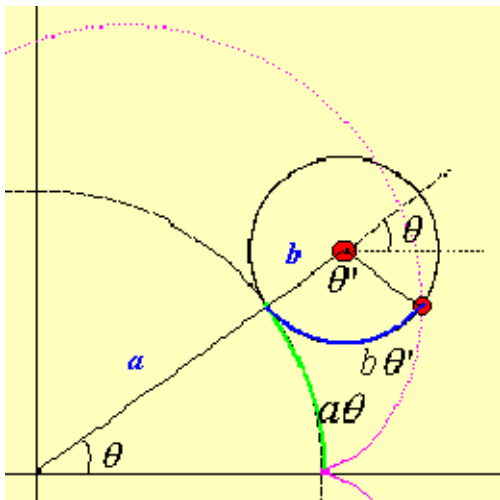
ここでは外サイクロイドを取上げる。

円周上の定点Pが描く外サイクロイドを考えると、座標平面上の点P(x,y)の座標は、定円の半径をa、その円周上を転がる動円の半径をbとおくと、

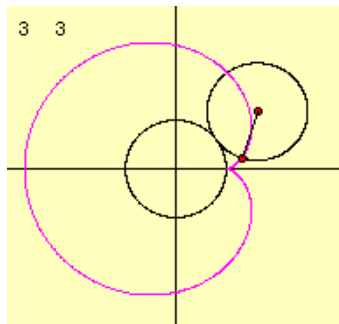
$$x = (a+b) \cos \theta - b \cos \frac{a+b}{b} \theta$$

$$y = (a+b) \sin \theta - b \sin \frac{a+b}{b} \theta$$

で表される(下図参照)。

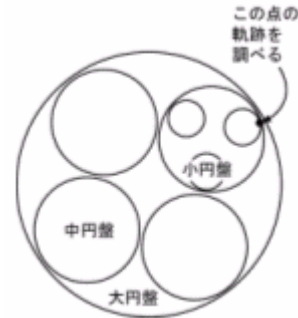


このとき、外サイクロイドの形は円の半径であるaとbの比、すなわち $\frac{a}{b}$ で決まることが知られている。例えば、 $\frac{a}{b} = 1$ ($a = b$)のときはカージオイドと呼ばれる心臓の形になる(下図参照)。なお、形は $\frac{a}{b} =$ 「正の整数」「負の整数」「分数」「無理数」の4パターンでおおまかに分類できる。



4.4. コーヒーカップの場合

それではコーヒーカップの描く軌跡を考えよう。ここでの求める軌跡は下図の点である。

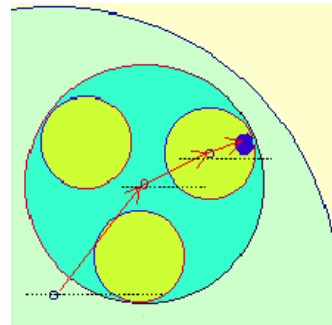


ここで、外サイクロイドのところで見てきたように、パラメータと軌跡の形は関係がある。極座標を使って上図のパラメータを表すと、

$$x = R_1 \cos 2\pi n_1 t + R_2 \cos 2\pi n_2 t + R_3 \cos 2\pi n_3 t$$

$$y = R_1 \sin 2\pi n_1 t + R_2 \sin 2\pi n_2 t + R_3 \sin 2\pi n_3 t$$

で表される(ただし、ここでの R_1, R_2, R_3 はそれぞれ、中円盤の回転半径、小円盤の回転半径、乗っている人のコーヒーカップの中心からの距離。また、 n_1, n_2, n_3 は大・中・小3つの円盤の回転する速さ(角速度)とする)。3つのベクトルの和と考えて求める(下図参照)。



5. シミュレーションプログラムの応用

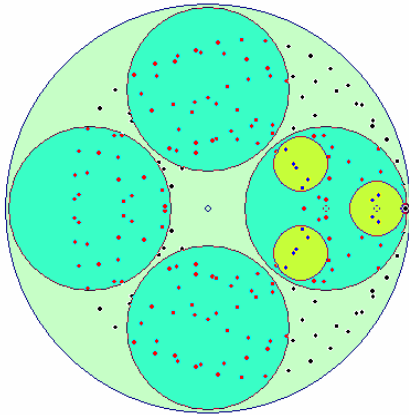
ここはコンピュータのシミュレーションプログラムを利用して、コーヒーカップの軌跡を見ていく。このシミュレーションプログラムは先ほどの数式をそのまま利用していて、データを打ち込むと、それに応じた軌跡を描いてくれる。

利用にあたって、今回は $n_3 = 0$ (小円盤が回らない、すなわち、ハンドルを回さない状態)とした。これはモデルで小円盤が作れなかったためと、条件を付けて規則性を考えやすくするためである。

5.1. LEGO とシミュレーションプログラム

まずは、自分が作ったキッドのデータを打ち込むと、下のようになる。

6: 1: 0



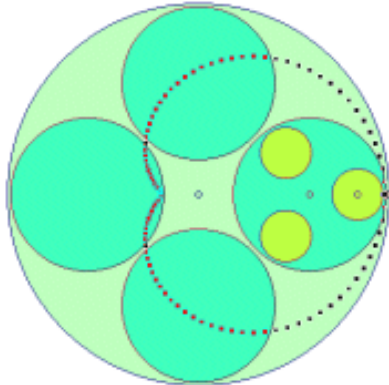
このような軌跡(点の集まり)になってしまったのは、キッドの中円盤の角速度が大円盤のものよりも遅くなってしまったためである。しかし、このキッドでは、歯車の組み合わせや LEGO の耐久度の関係上、角速度は変えられないので、実際の軌跡にはほど遠くなってしまふことが改めてよく分かる。

5.2. 一般的なコーヒーカップの軌跡

そこで今度はこのシミュレーションプログラムに次々とデータを打ち込み、軌跡をたくさん見てみる。しかし今回は外サイクロイドの時のようにはいかず、角速度によって大幅に変わってきてしまい、規則を見いだすのは難しかった。

ただ、設定の仕方によっては、次のような軌跡も得られ、サイクロイドであることを確認するのは容易である。

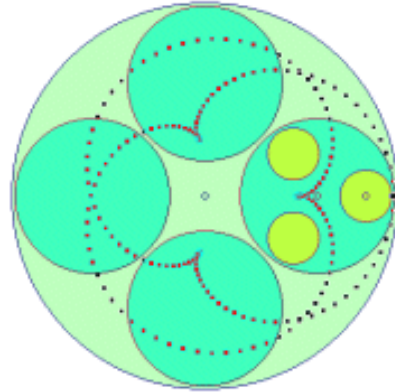
1: 2: 0



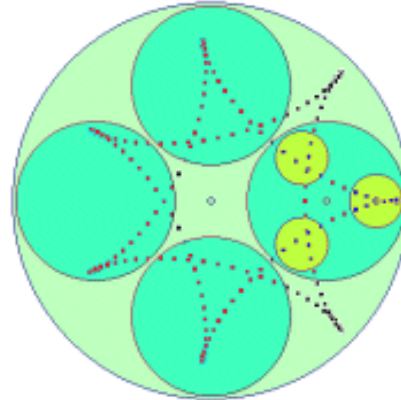
先ほど出てきたカージオイドと同じである。

ここで一般的なコーヒーカップの軌跡を挙げておくと

1: 2.5: 0



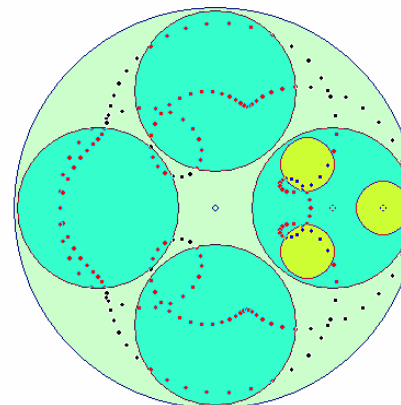
1:-2.5: 0



これらの軌跡は、 $n_3 = 0$ のときなので、ハンドルを回さなければ、このような軌跡を描くことになるだろう。

ハンドルを回さなくてもこれだけ複雑なので、ハンドルを回せばもっと複雑な軌跡を描くことになるのは容易に想像できるだろう。例えば、

1: 2.5: 5



この図は、自動で回っている中円盤の2倍の速さ(角速度)で小円盤を回したときに、乗っている人が描く軌跡である。何とも言葉にじづらい軌跡である。

6. 終わりに

乗っている本人は気付きもしないだろうが、コーヒーカップは、これほどにも複雑な軌跡を描いていたのである。

今回の研究では、「動きの再現」をテーマに視覚に訴えるような研究を目指したため、平面にすると伝えづらいところも多かったが、このレポートではコーヒーカップの軌跡の複雑さや多様性を表現することを中心にした。

参考 WEB サイト

- <<http://130.158.186.11/mathedu/forAll/kikou/lego/07.html>> [2006, September 30]
- <<http://www.k12.osaka-kyoiku.ac.jp/phys/exc/coffee.htm>> [2007, March 28]
- <<http://www.nikonet.or.jp/spring/mery/mery.htm>> [2007, March 29]
- <<http://www.nikonet.or.jp/spring/mery/merry.2.exe>> (シミュレーションプログラムのダウンロードもと) [2007, March 29]
- <www.dendai.ed.jp/~komine/book/blue01.pdf> [2007, March 29]
- <<http://ja.wikipedia.org/wiki/%E9%81%8A%E6%98%9F%E6%AD%AF%E8%BB%8A>> (遊星歯車機構の図) [2007, March 29]