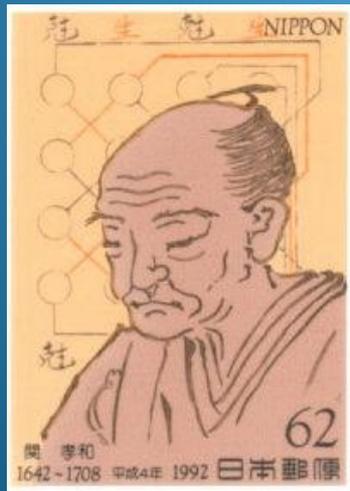


# 『算学啓蒙』 (朱世傑、 1299年) と鶴亀算

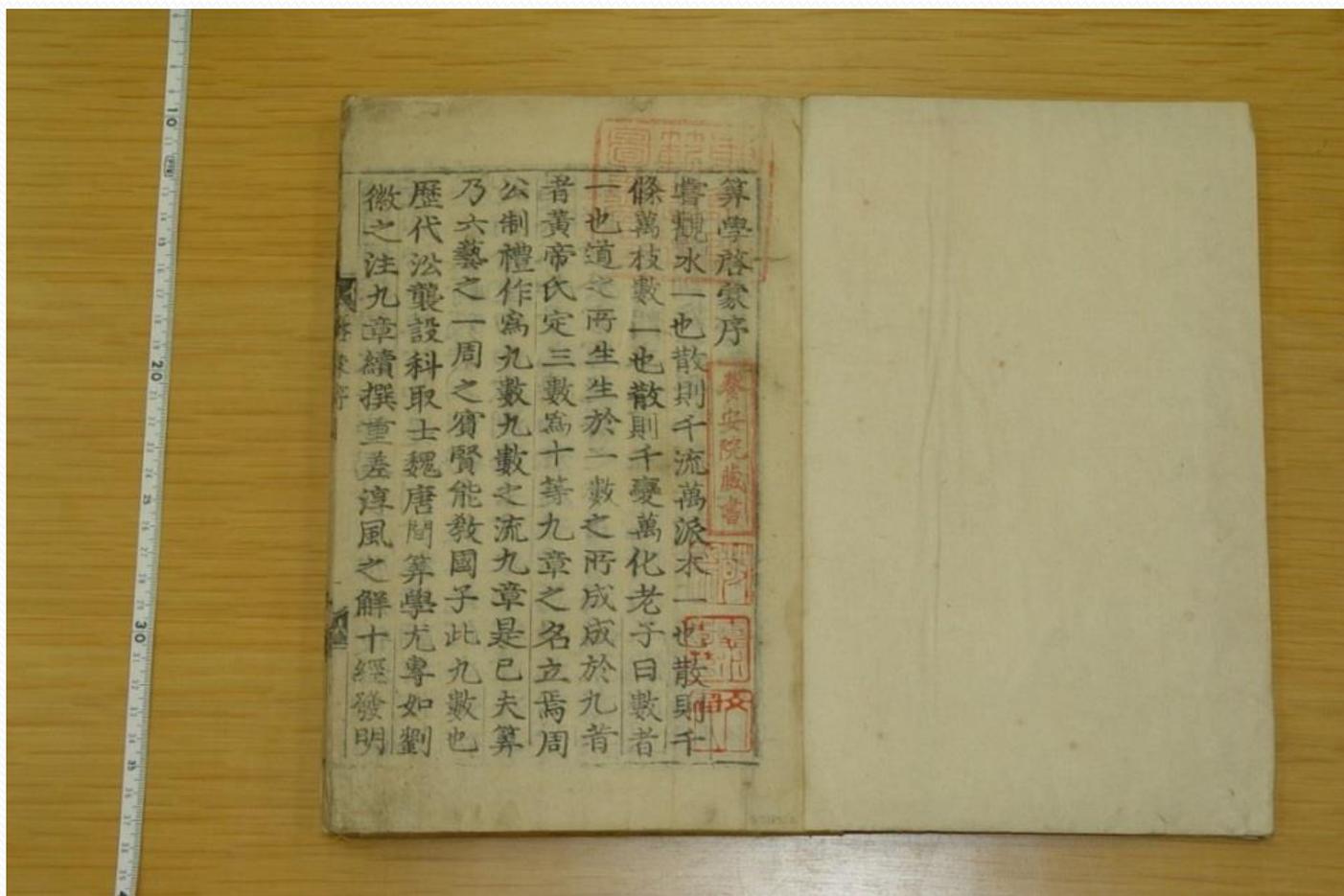


TGSW2015, TSUKUBA  
筑波大学磯田正美研究室  
9月29日

大阪教育大学  
城地 茂

# 筑波大学本 『算学啓蒙』

- 朝鮮銅活字本 < 木版本多数 世界唯一? の銅活字本



# 『算学啓蒙』の出版

- 1299年 (元) 朱世傑、『算学啓蒙』出版(現存せず)
- 1430年頃 『新編算学啓蒙』(国初印本)(筑波大学本)
- 李氏朝鮮の算科教科書 『算学啓蒙』『楊輝算法』『詳明算法』『五曹算経』『地算』  
(1592-1598年 豊臣秀吉朝鮮出兵)
- 1658年 (日本) 久田玄哲 訓点本(国初印本に訓点)
- 1660年 (朝鮮) 金始振 重刊本(現存せず)
- 1834年 (清) 羅士琳 重刊本(金始振本を校正)(中国国家図書館)
-

# 『算学啓蒙』の重要性

- 天元術（中国式代数学）の入門書

立てた高次方程式の解き方は『楊輝算法』（楊輝、1275年）『数書九章』（秦九韶、1247年）などに記述

- 鶴亀算の初出 ???



- 掛け算九九を「一一如一」⇒「九九八十一」の順に記述した初出

『楊輝算法』の目次には九九を「一一如一」～

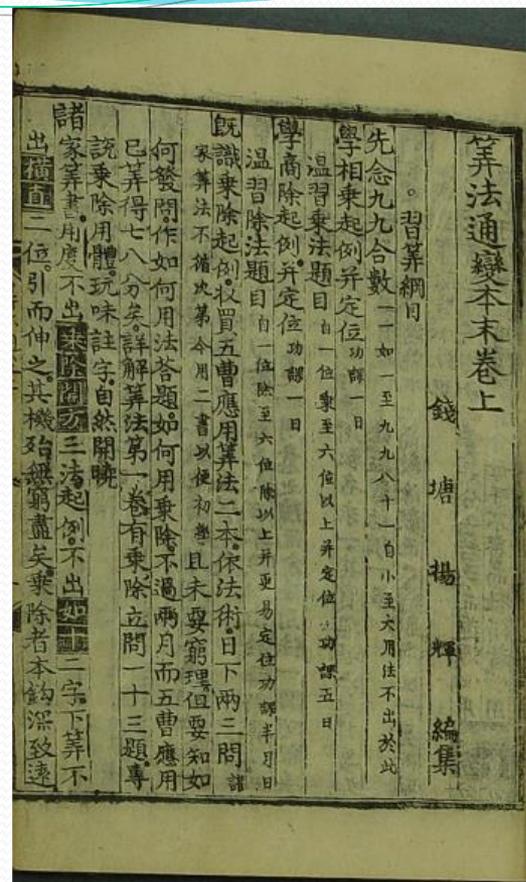
13世紀算書群は「算木数学の完成形」⇒「近世」の開闢

# 九九の順序

- 『算学啓蒙』(1299年)

新編算学啓蒙總括  
釋九數法

一七如七	二七一十四	三七二十一
四七二十八	五七三十五	六七四十二
七七四十九	一八如八	二八一十六
三八二十四	四八三十二	五八四十四
六八四十八	七八五十六	八八六十四
一九如九	二九一十八	三九二十七
四九三十六	五九四十五	六九五十四
七九六十三	八九七十二	九九八十一
九歸除法	按古法多用商除爲初學者難 則後人以此法代之即非正術	



## 『楊輝算法』(1275年)

# 里耶九九木牘

- 湖南省龍山県里耶鎮
- 秦簡、BCE.222年-208年
- 2002年6月発掘
- 2012年切手発売



# 『孫子算經』の鶴亀算？

- 『孫子算經』（著者不詳、400年頃）卷下第31題「雉兔同籠」問題。
- 今有雉兔同籠、上有三十五頭下有九十四足。問雉兔各幾何。
- 答曰。雉二十三、兔一十二。
- （中略）又術曰。上置頭、下置足。半其足、以頭除足、以足除頭、即得。

# 『孫子算経』の鶴亀算？

- 雉と兎が同じ籠に入っているとす。上には35の頭が、下には94の足がある。雉と兎はそれぞれ幾らになるか。
- 答。雉23羽、兎12羽。
- (中略) もう一つの術。上に頭、下に足の数をならべる。足の数を半分にする。これから頭の数を書いて (、兎の数)、頭から足を引くと (雉の) 答えになる。

# 代数(「方程」)的解法

- 雉を $x$ 、兔を $y$ とすると、

- $x + y = 35$

- $2x + 4y = 94$

- $2x + 2y = 70$

$$4x + 4y = 140$$

- $2x + 4y = 94$

$$2x + 4y = 94$$



- $2y = 24$

$$2x = 46$$

# 鶴亀算による解法

- 全部を雉と仮定すると、足は 70
- ところが実際には足は、 94
- 差は、 24
- 1羽につき、 $4-2$ 違ってくるから、 $24 \div 2 = 12$  (兎)
  
- 全部を兎と仮定すると、足は 140
- ところが実際には足は、 94
- 差は、 46
- 1羽につき、 $4-2$ 違ってくるから、 $46 \div 2 = 23$  (雉)

# 『算学啓蒙』卷中「求差分和門」

- 今有雉兔一百、共足二百七十二隻。只云、雉足二、兔足四。問雉兔各幾何。
- 答曰、雉六十四隻。兔三十六隻。
- 術曰、列一百、以兔足乘之、得數、內減共足、余一百二十八、為實。列雉·兔足、以少減多、余二、為法。而一得雉。反減一百、即兔、合問。
- 又術曰、倍一百、以減共足、余半之、即兔也。

# 『算学啓蒙』巻中「求差分和門」

- 雉と兎100羽があり、足は272本だとする。只、雉の足は2本、兎の足は4本である。雉と兎は、各幾何になるかを問う。
- 答に曰う、雉64羽、兎36羽。
- 術に曰う、100をならべ、兎の足(4)をかけて、得た数(400)から合計の足の数(272)を引き、余は128になり、これを「実」(被除数)とする。雉と兎の足(の数)をならべ、多い方から少ない方を引き、余が2となり、これを「法」(除数)とする。割り算をすると雉(64)が得られる。反対に100から引くと、即ち兎(36)となり、題意に合う。
- 又術に曰う、100を倍にして、合計の足の数(272)から引き、之(72)を半分にする(36)と、即ち兎である。

# 漢字を使った代数的解法

- 漢字は記号

- $1\text{雉} + 1\text{兎} = 35$

- $2\text{雉} + 4\text{兎} = 94$

- $2\text{雉} + 2\text{兎} = 70$

$$4\text{雉} + 4\text{兎} = 140$$

- $2\text{雉} + 4\text{兎} = 94$

$$2\text{雉} + 4\text{兎} = 94$$

- 

- $2\text{兎} = 24$

$$2\text{雉} = 46$$

# 『孫子算経』の演算

- 頭 35
- 足 94
- 「上に頭、下に足の数をならべる」
- **算木**で、数値を並べる。

正の数 赤の算木

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
縦式		┆	┆┆	┆┆┆	┆┆┆┆	┆┆┆┆┆	┆┆┆┆┆┆	┆┆┆┆┆┆┆	┆┆┆┆┆┆┆┆	┆┆┆┆┆┆┆┆┆
横式		—	＝	≡	≡	≡	┆┆	┆┆	┆┆	┆┆

# 『孫子算経』の演算

- 頭 35
- 足 94 → 47
- $94 \div 2 = 47$  「足の数(94)を半分にする。」(47)

# 『孫子算経』の解法

- 頭 35
- 足  $94 \rightarrow 47 \rightarrow 12$
  
- $47 - 35 = 12$
- 「これ(47)から頭の数(35)を引いて、これ(12)が(、兎の数)になる。」

# 『孫子算経』の解法

- 頭 35  $\rightarrow$  23
- 足 94  $\rightarrow$  47  $\rightarrow$  12
- $35 - 12 = 23$
- 「足(12)を頭(35)から引くと、(雉の)答え(23)になる。」

# 『孫子算経』題の解釈

- 雉を $x$ 、兔を $y$ とすると、

- $x + y = 35$       頭の数

- $2x + 4y = 94$       足の数

- $x + y = 35$

- $x + 2y = 47$

足を半分にする。

- $x = 23$

足から頭を引いて、雉の数。

- $y = 12$

これから頭の数から引いて、兔の数、

# 『九章算術』の「方程」

- 『九章算術』（著者不詳、50年頃）卷8第1題。
- 今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，實三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，實三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，實二十六斗。問上、中、下禾實一秉各幾何？
- 答曰：上禾一秉，九斗、四分斗之一，中禾一秉，四斗、四分斗之一，下禾一秉，二斗、四分斗之三。
- **方程術**曰，置上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，實三十九斗，於右方。中、左禾列如右方。以右行上禾遍乘中行而以直除。又乘其次，亦以直除。然以中行中禾不尽者遍乘左行而以直除。左方下禾不尽者，上為法，下為實。實即下禾之實。求中禾，以法乘中行下實，而除下禾之實。餘如中禾秉數而一，即中禾之實。求上禾亦以法乘右行下實，而除下禾、中禾之實。余如上禾秉數而一，即上禾之實。實皆如法，各得一斗。

# 『九章算術』の「方程」

	左行	中行	右行
● 上禾	1	2	3
● 中禾	2	3	2
● 下禾	3	1	1
● 实	26	34	39

- $3x + 2y + z = 39$  (右行)
- $2x + 3y + z = 34$  (中行)
- $x + 2y + 3z = 26$  (左行)

# 『九章算術』の「方程」

	左行	中行	右行
● 上禾	1	6	3
● 中禾	2	9	2
● 下禾	3	3	1
● 实	26	102	39

●  $3x + 2y + z = 39$  (右行)

●  $6x + 9y + 3z = 34$  (中行) 以右行上禾遍乘中行

●  $x + 2y + 3z = 26$  (左行)

# 『九章算術』の「方程」

	左行	中行	右行
● 上禾	1	0	3
● 中禾	2	5	2
● 下禾	3	1	1
● 实	26	24	39

- $3x + 2y + z = 39$  (右行)
- $5y + z = 24$  (中行) 而以直除。2' - 2 × 1
- $x + 2y + 3z = 26$  (左行)

# 『九章算術』の「方程」

	左行	中行	右行
● 上禾	3	0	3
● 中禾	6	5	2
● 下禾	9	1	1
● 实	78	24	39

●  $3x + 2y + z = 39$  (右行)

●  $5y + z = 24$  (中行)

●  $3x + 6y + 9z = 78$  (左行) 又乘其次、 $3 \times 3$ 式

# 『九章算術』の「方程」

	左行	中行	右行
● 上禾	0	0	3
● 中禾	4	5	2
● 下禾	8	1	1
● 实	39	24	39

●  $3x + 2y + z = 39$  (右行)

●  $5y + z = 24$  (中行)

●  $4y + 8z = 39$  (左行) 亦以直除。3' 式-1式

# 『九章算術』の「方程」

	左行	中行	右行
● 上禾	0	0	3
● 中禾	0	5	2
● 下禾	36	1	1
● 实	99	24	39

●  $3x + 2y + z = 39$  (右行)

●  $5y + z = 24$  (中行)

●  $36z = 99$  (左行) 而以直除。3” -4×2’

# 『九章算術』の「方程」

	左行	中行	右行
● 上禾	0	0	3
● 中禾	0	180	2
● 下禾	36	36	1
● 实	99	864	39

●  $3x + 2y + z = 39$  (右行)

●  $180y + 36z = 864$  (中行)

●  $36z = 99$  (左行) 左方下禾不尽者，

● 上為法 (分母)，下為实 (分子)

● 实即下禾之实。

# 『九章算術』の「方程」

	左行	中行	右行
● 上禾	0	0	3
● 中禾	0	180	2
● 下禾	36	36	1
● 实	99	864	39

●  $3x + 2y + z = 39$  (右行)

●  $180y + 36z = 864$  (中行) 求中禾，以法乘中行下实，

●  $36z = 99$  (左行)

# 『九章算術』の「方程」

	左行	中行	右行
● 上禾	0	0	3
● 中禾	0	180	2
● 下禾	36	0	1
● 实	99	765	39

●  $3x + 2y + z = 39$  (右行)

●  $180y = 765$  (中行) 而除下禾之实。

●  $36z = 99$  (左行)

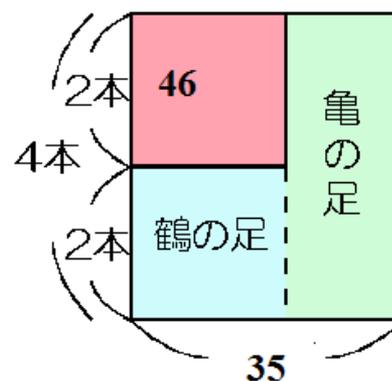
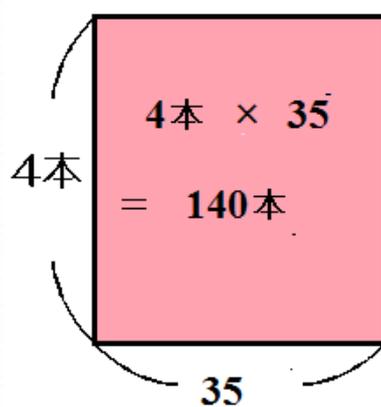
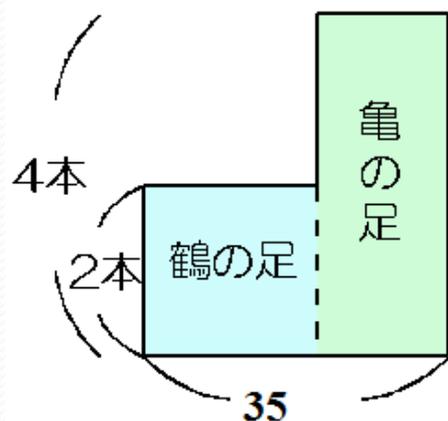
# 『九章算術』の「方程」

- 餘如中禾秉數而一，即中禾之實。求上禾亦以法乘右行下實，而除下禾、中禾之實。余如上禾秉數而一，即上禾之實。實皆如法，各得一斗。

# 面積図を使った解釈

- 『算学啓蒙諺解大成』(建部賢弘、1690年)が初出

全部を亀と仮定



# 和算(江戸時代)での活用

- 『因帰算歌』(今村知商、1640年)
  - 『算学啓蒙』類似問題
  
  - 『算法点竄指南録』(坂部広眸、1815年)
  - 雉や鶏などの鳥類      鶴      鶴は千年
  - ウサギなどの動物      亀      亀は万年
  - 
  -
- 目出度い動物に変更  
教育的見地

# 算木(さんぎ) ← 籌(ちゆう)

- 珠算以前の計算道具(元代(14c)まで)
- 日本では算盤(さんばん)に
- ならべる

正の数 赤の算木

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
縦式		┆	┆┆	┆┆┆	┆┆┆┆	┆┆┆┆┆	┆┆┆┆┆┆	┆┆┆┆┆┆┆	┆┆┆┆┆┆┆┆	┆┆┆┆┆┆┆┆┆
横式		—	==	≡	≡	≡	┆┆┆	┆┆┆	┆┆┆	┆┆┆

負の数 黒の算木を置く

	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
縦式							┐	┑	┑	┑
横式		—	==	≡	≡	≡	┐	┑	┑	┑



陝西省安康市  
旬陽県出土  
漢代 象牙製

231			≡	
5089	≡		┑	┑
-407				┑
-6720	┐	┑	==	

# まとめ

- 紀元前後に「方程」が成立、その捷法(早い方法)として鶴亀算が13世紀に出現
- 和算(日本数学)では、教育的見地から動物を、鶴亀に変更。
- 13世紀には、商業活動を維持するための速算へと変貌
- 13世紀東アジア数学は「近世」の開始