

EL ESTUDIO DE CLASES Y LAS DEMANDAS CURRICULARES

La Enseñanza de la Multiplicación

Masami Isoda y Raimundo Olfos



Ediciones Universitarias de Valparaíso
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso



MASAMI ISODA es profesor adjunto de la Universidad de Tsukuba, Japón; Director de la Sociedad de Educación Matemática de Japón; su disciplina principal en Educación matemática es Matematización desde la Perspectiva Histórica. Su área de trabajo más importante en la actualidad es de cooperación educativa para los países en vías de desarrollo. Él ha estado manejando tres proyectos nacionales por el Ministerio de Educación en Japón y un proyecto internacional por la cooperación económica de Asia y del Pacífico (APEC), y ha estado vinculado a proyectos por la JICA para siete países en vías de desarrollo.

RAIMUNDO OLFOS AYARZA es profesor Adjunto de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Secretario General de la Sociedad Chilena de Educación Matemática y Director del Centro de Investigación en Didáctica de la Matemática IREM-PUCV. Sus áreas de especialización en Educación Matemática son Pensamiento Numérico y Algebraico, Desarrollo Curricular y Formación de Profesores. Es revisor en las publicaciones periódicas *Journal for Research in Mathematic Education* (NCTM), *Revista UNION Iberoamericana en Educación Matemática* y director de la *Revista Chilena de Investigación en Educación Matemática*.

El Estudio de Clases y las demandas curriculares

LA ENSEÑANZA DE LA MULTIPLICACIÓN

MASAMI ISODA

RAIMUNDO OLFOS

Tsukuba

Valparaíso

2009



EDICIONES UNIVERSITARIAS DE VALPARAÍSO
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO

Nuestros reconocimientos a:

CRICED, Centro para la Investigación en el Desarrollo Educacional en Cooperación Internacional de la Universidad de Tsukuba, patrocinante de la Estadía de Investigación del Dr. Olfos en la Universidad de Tsukuba, Japón. Marzo - Junio 2008.

JICA, Agencia de Cooperación Internacional de Japón y los Ministerios de Educación de Japón y de Chile, por facilitar la profundización en el Estudio de Clases a través de un curso con visitas al aula para académicos chilenos, Febrero 2008. JICA y CRICED, por el patrocinio parcial de la versión editada del presente libro.

Profesores Satoshi Natsusaka, Hiroshi Tanaka, Kozo Tsubota, Takao Seiyama de la Escuela Anexa de la Universidad de Tsukuba en Tokio, y al profesor Hideyuki Muramoto de la Escuela de Maruyama, quienes generosamente compartieron sus clases, planes de clases, materiales didácticos y tiempos para la discusión.

Profesora Soledad Estrella, correctora de las versiones preliminares, orientadora del diseño y de la selección fotográfica.

Dr. Abraham Arcavi, del Instituto Científico de Weizmann de Israel y al Profesor Arturo Mena Decano de la Facultad de Ciencias de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, por las revisiones finales del libro. Profesores Hiroki Hayashi, Hiromi Miyakoshi, Orlando González y Napoleón Avila como soporte en las traducciones japonés, inglés y español.

Universidad Católica de Valparaíso, Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas y Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Tsukuba, Masami Isoda
Valparaíso, Raimundo Olfos

Enero 2009

ÍNDICE

Prólogo	Página 9
Introducción	15
PARTE I: La multiplicación de los naturales en el currículo	17
Nuevo marco para la enseñanza de la multiplicación	19
- <i>El principio de extensión para la enseñanza de la multiplicación</i>	<i>21</i>
La multiplicación con naturales en el currículo de 8 países	22
- <i>Paralelo en torno al tratamiento de la multiplicación</i>	<i>26</i>
Organización de la multiplicación en la guía para el maestro y en los textos escolares japoneses.	28
- <i>Secuenciación en la enseñanza de la multiplicación.</i>	<i>30</i>
Orientaciones gubernamentales para la enseñanza de la multiplicación en Japón y en Chile	32
- <i>Orientaciones desde la Guía para la enseñanza en Japón</i>	<i>33</i>
- <i>Orientaciones para enseñar la multiplicación en Chile</i>	<i>35</i>
- <i>Orientaciones desde el Marco Curricular en Chile.</i>	<i>36</i>
PARTE II: La enseñanza del concepto de multiplicación, las tablas de multiplicar y las propiedades de la tabla	41
Introducción	43
El concepto de multiplicación	44
- <i>Problemas de tipo multiplicativo</i>	<i>45</i>
- <i>El modelo multiplicativo</i>	<i>45</i>
La enseñanza del concepto de multiplicación	46
- <i>Cómo iniciar el estudio de la multiplicación en la escuela.</i>	<i>47</i>
- <i>La suma repetida como conocimiento previo y la unidad como conflicto cognitivo</i>	<i>48</i>
- <i>Expresión matemática y procedimiento operativo de la multiplicación</i>	<i>49</i>

- Desde la conmutatividad al uso de la expresión "multiplicado por"	53
- La iniciación a la multiplicación en la Guía de Japón	54
- Iniciación a la multiplicación en los programas chilenos	54
La iniciación a la multiplicación en un caso de Estudio de Clases	57
- Descripción y plan de la clase a investigar	57
- Relato de una clase pública en que se inicia el estudio de la multiplicación.	61
- Análisis de la clase del profesor Natsusaka	69
Ejemplo de clase de investigación. Aplicación del concepto de multiplicación	76
Desarrollo de la habilidad de agrupamiento a través del estudio de la multiplicación en el caso de Japón	79
Plan de la subunidad "Iniciación al Concepto de Multiplicación"	81
- Sesión 1: Una nueva forma de calcular	82
- Sesión 2: La multiplicación en nuevos contextos	85
- Sesión 3: Usemos el modelo de la multiplicación	89
Enseñanza de las tablas y de las propiedades de la tabla.	92
Orientaciones para la enseñanza de las tablas y sus propiedades.	92
- Memorización y comprensión para avanzar en las tablas	92
- Las sugerencias de los textos	94
Uso de materiales para la memorización y la comprensión.	97
- Uso de la colección de círculos	97
- Uso de tarjetas y naipes	97
- Uso de naipes ilustrados	99
- Características de las cartas de tablas de multiplicar ilustradas	99
- Uso de hoja o libreta de registro de avance	101
Sugerencia de los programas para la enseñanza de las tablas.	103
- La enseñanza de las tablas en la Guía de Japón.	103
- La enseñanza de las tablas en los programas chilenos	104
Enseñanza de las tablas del 2 al 5	109
- Entregar la responsabilidad de aprender al alumno	109
- Planificación de la Subunidad "Las tablas del 2 al 5"	110
Sesión 1: Construyendo la tabla del 2	112
Sesión 2: Memorizando la tabla del 2	114
Sesión 3: Aplicando la tabla del 2	115
Sesión 13: Entreteniéndonos con las tablas del 2 al 5	117
Sesión 14: Descubriendo propiedades en las tablas del 2 al 5.	119
- Usemos las tablas de multiplicar ya estudiadas.	120
Enseñanza de las tablas del 6 al 9	121
- Para multiplicar por 6 o más	121
- Planificación de la Subunidad "Las tablas del 6 al 9"	122

Sesión 1: Construyendo la tabla del 6	123
Sesión 2: Memorizando la tabla del 6	125
Sesión 3: Aplicando la tabla del 6	126
Sesión 13: Ejercitando y aplicando tablas del 6 al 9	128
Sesión 14: Entreteniéndose con las tablas del 6 al 9	130
Propiedades de las tablas y de la tabla completa	132
- <i>Clase para investigar: Propiedades de la multiplicación</i>	<i>132</i>
- <i>La multiplicación por 1 y la propiedad conmutativa</i>	<i>135</i>
- <i>Planificación de la Subunidad "Propiedades de la tabla"</i>	<i>135</i>
Sesión 1: Construyendo y memorizando la tabla del 1	136
Sesión 2: Construyendo y leyendo la tabla bidimensional para la multiplicación	138
Sesión 3: Descubriendo la relación entre el multiplicador y el producto	140
Sesión 4: Descubriendo la conmutatividad de la multiplicación	142
Sesión 5: Ejercitando y aplicando las tablas multiplicación	144
Sesión 6: Ejercitando y entreteniéndonos con las tablas	146
Sesión 7: Ejercitando y entreteniéndonos con la multiplicación	147
PARTE III: Enseñando a multiplicar números de varias cifras	149
Términos para enseñar la multiplicación con multidígitos	151
Tendencias internacionales sobre la enseñanza de la multiplicación	154
- <i>El algoritmo de la multiplicación en el currículo escolar</i>	<i>154</i>
- <i>Investigación sobre la enseñanza de los algoritmos de cálculo</i>	<i>155</i>
- <i>A modo de síntesis</i>	<i>156</i>
Enseñanza de la multiplicación con multidígitos en Japón y en Chile	157
- <i>Multiplicación con multidígitos en la Guía de Japón</i>	<i>157</i>
- <i>Multiplicación con multidígitos en los programas chilenos</i>	<i>158</i>
Estudio de una clase en la que se enseña la forma de calcular una multiplicación	168
- <i>Descripción general de la clase</i>	<i>168</i>
- <i>Génesis de este plan de clases</i>	<i>169</i>
- <i>Descripción y análisis de los episodios de la clase</i>	<i>171</i>
- <i>Criterios para evaluar la clase</i>	<i>174</i>
- <i>Plan de la clase 4 de la secuencia de 13 sesiones</i>	<i>174</i>
- <i>Planificación de las 13 sesiones de la Unidad</i>	<i>176</i>
- <i>Metas de la Unidad</i>	<i>177</i>
La visión del grupo de Maruyama	177
- <i>Elementos relevantes de la visión del grupo de Maruyama</i>	<i>178</i>
- <i>Los puntos de vista del grupo de Maruyama</i>	<i>179</i>
- <i>Características de los alumnos de la Escuela de Maruyama</i>	<i>184</i>

Planificación de la Unidad "Multiplicación con multidígitos"	186
- <i>Características de la Unidad</i>	186
- <i>Identificación de las subunidades de la Unidad</i>	188
- <i>Sugerencias generales para el tratamiento de la Unidad</i>	190
Subunidad: Multipliquemos con ceros	192
Sesión 1: Multiplicando con el factor 0	192
Sesión 2: Descubriendo la multiplicación por 10, 100 y 1000	195
Sesión 3: Descubriendo la multiplicación por D0, C00, U _M 000 x U	196
Sesión 4: Descubriendo la multiplicación por D0, C00 x U con canje	197
Subunidad: Multipliquemos en la forma vertical.	198
Sesión 1: Descubriendo la multiplicación entre números DU x U, sin canje	198
Sesión 2: Descubriendo la multiplicación entre números DU x U, con canje	200
Sesión 3: Descubriendo la multiplicación DU x U, con canje en la decena	201
Sesión 4: Descubriendo la multiplicación DU x U, con canje en el proceso.	202
Sesión 5: Ejercitando la multiplicación entre números DU x U	203
Subunidad: Sigamos multiplicando en forma vertical	204
Sesión 1: Descubriendo la multiplicación CDU x U, sin canje	204
Sesión 2: Descubriendo la multiplicación CDU x U, con canje en las unidades y/o decenas	205
Sesión 3: Descubriendo la multiplicación CDU x U, con canje en las centenas y en la suma de productos parciales	206
Sesión 4: Resolviendo ejercicios y problemas de la aplicación de la multiplicación CDU x U, con canjes	208
Sesión 5: Confirmando lo aprendido sobre la multiplicación CDU x U	209
Subunidad: Multiplicando y multiplicador con multidígitos	210
Sesión 1: Descubriendo la multiplicación DU x DU, sin canje	210
Sesión 2: Descubriendo la multiplicación DU x DU, con canje.	211
Sesión 3: Explicaciones a la forma de multiplicar multidígitos	213
Sesión 4: Descubriendo la multiplicación CDU x DU	215
ANEXO 1. La extensión del concepto de multiplicación	217
ANEXO 2. Diferencias gramaticales en la notación matemática	223
Referencias Bibliográficas	227

PRÓLOGO

El propósito más evidente de este libro es ofrecer a profesores de educación básica y formadores de profesores ejemplos de lecciones, planes de clases y sugerencias para enseñar la multiplicación. Estas orientaciones son fruto de la experiencia del Estudio de Clases en Japón desde la década de 1870 y de antecedentes complementarios de la literatura internacional con respecto a la enseñanza y el aprendizaje de la multiplicación. El currículo escolar destina gran cantidad de horas a su enseñanza. Este libro se restringe al estudio de la enseñanza de multiplicación con números naturales, quedando fuera del foco de análisis la multiplicación de fracciones y de números decimales.

Un segundo propósito es favorecer en investigadores, curriculistas y autores de textos, como también en docentes y estudiantes de pedagogía, la comprensión de una estrategia de enseñanza que concilia el enfoque de resolución de problemas, originado en Japón hacia 1940, con el estudio de los contenidos del currículo. Este enfoque ha alcanzado reconocimiento internacional desde la década de 1990 en virtud de las situaciones problemas que se van mejorando con el Estudio de Clases y de su difusión a través de clases públicas. El libro se nutre del impacto del Estudio de Clases sobre las decisiones curriculares gubernamentales y el comportamiento de los profesores en las aulas de Japón, quedando a la vista una educación matemática eficiente y vanguardista. De hecho, los resultados en matemáticas de Japón en las mediciones TIMSS y PISA, a pesar de haber disminuido, se mantienen en el cuartil superior más allá de haber reducido sólo a 3 horas semanales la componente matemática del currículo de 1° a 6° grado durante la década anterior, decisión comparativamente desventajosa en el contexto internacional.

Este libro es parte de una edición pionera que difunde en el mundo hispano hablante un modelo de enseñanza de la matemática escolar en el que los

profesores ponen en juego su creatividad y son los protagonistas del proceso. Además, este modelo basado en la resolución de problemas y los requerimientos del currículo concilia en la práctica los dos grandes propósitos de la educación matemática, a saber, el formativo y el informativo. En la dimensión formativa, favorece el desarrollo de las habilidades transversales de pensamiento y comunicación en matemáticas (Isoda, 2006), y en la dimensión informativa, favorece la adquisición de los contenidos disciplinarios.

El libro muestra ejemplos concretos de cómo preparar e implementar clases centradas en la resolución de problemas y que contribuyen a cubrir los programas de estudio; dando pistas para que en Chile e Hispanoamérica la reflexión de los docentes permita generar una tradición de enseñanza ajustada a las demandas curriculares y a la tendencia de formar ciudadanos reflexivos. Algunos de los ejemplos ofrecidos cuentan con respaldos de videos de clases y video-clips, facilitando la autonomía del docente para profundizar en las ideas desarrolladas en este libro, de modo que se anime a incorporar el Estudio de Clases en su actividad profesional cotidiana.

Paralelamente, el uso del libro por los docentes contribuirá a brindar una mejor educación matemática a las nuevas generaciones y a orientar un mejoramiento de la enseñanza de la multiplicación en el currículo. Los autores del libro invitan a los lectores a involucrarse en el Estudio de Clases en torno a la enseñanza de la multiplicación, para que así sientan en carne propia un cambio en el clima de sus clases y en los aprendizajes de sus alumnos.

En este libro, los temas son tratados en profundidad, dando énfasis a dos cuestiones centrales en el Estudio de Clases, cruciales para el éxito de las clases de matemáticas: los conocimientos ya adquiridos por el alumno antes de iniciar la clase y la situación problema que lleva a un cambio en la comprensión como condición para alcanzar un aprendizaje profundo. Estas dos cuestiones regulan la secuencia de los contenidos de enseñanza tratados en este libro y la profundidad con que son expuestos, asunto que a la larga ayudará al lector a ajustar la enseñanza a los contextos y a las situaciones particulares en que viven los alumnos.

Este libro se constituye en una poderosa herramienta que favorece en los profesores y formadores de profesores de educación básica de habla hispana el conocimiento del contenido pedagógico y el desarrollo de habilidades para gestionar la clase. Esto, a partir de la descripción y reflexión de "situaciones de clases" y preguntas tan simples como "¿cómo lo calcularías?, ¿cómo

cambia la expresión si...? ¿se puede hacer de otra forma?, ¿por qué esa forma permite llegar a la respuesta?” que en definitiva conducen a aprendizajes de alto nivel.

Estructura del libro

El libro está estructurado en 3 partes. En la primera parte se muestra cuáles son las principales etapas del aprendizaje de la multiplicación de números naturales, mostrando el fenómeno desde una perspectiva internacional. Una visión sinóptica del tratamiento de la multiplicación en el currículo de ocho países, cuatro del Medio Este asiático y cuatro de América. Finalmente, se exponen orientaciones para la enseñanza de la multiplicación, según lo propone la Guía de Enseñanza para Profesores de Matemática del Gobierno de Japón y se la compara con las Orientaciones Curriculares que ofrece el Gobierno de Chile a sus homólogos.

La segunda parte se refiere a la introducción del concepto de multiplicación, al aprendizaje de las tablas y al descubrimiento de las propiedades en la tabla. El enfoque de enseñanza descrito en esta sección es un tema fascinante no sólo para los profesores de aula, sino también para sus formadores. Se aprecia cómo los educadores matemáticos en Japón fueron capaces de articular el currículo en torno a la enseñanza de la multiplicación, a partir de la noción de extensión. Se hace notar cómo la introducción a la multiplicación como proporcionalidad -según lo propusiera Descartes- permite relacionar esta operación en 2º grado con la adición ya estudiada, los principios elementales de Dedekind y Peano, y en 3º grado con la multiplicación de fracciones y decimales, un verdadero acierto en cuanto a la transposición didáctica. Se señala además la importancia de agrupar para usar la unidad con números discretos, de modo que los niños sean capaces de extender sus ideas desde la suma iterada. Esta sección presenta planes de clases de los profesores Natusaka y Tsubota de la Escuela Anexa de la Universidad de Tsukuba en Tokio, y la descripción de la clase pública y su discusión realizada con la presencia de cientos de profesores de aula japoneses y algunos hispanoamericanos. La sección incluye aclaraciones sobre el uso de algunas expresiones y sugerencias sobre el tratamiento de los temas y el uso de materiales de enseñanza. También presenta planes de secuencias de clases completas que deleitarán la reflexión del docente en torno a la iniciación de la multiplicación, el tratamiento de las tablas y el estudio de las propiedades de la tabla hasta 9×9 .

La tercera parte trata la enseñanza de los procedimientos estándares para la multiplicación con multidígitos¹, la multiplicación vertical y el algoritmo simplificado. Por un lado se analiza una clase en la que el profesor Muramoto, de la escuela elemental Maruyama, guía a los alumnos hacia el algoritmo de la multiplicación en tercero básico. Se analiza la cuarta clase de una secuencia de 13. La clase del profesor Muramoto fue realizada en público a un curso de 40 alumnos. Se incluye un análisis de la clase que destaca los componentes y acontecimientos principales de la misma, constituyéndola en un ejemplar de las producciones del Estudio de Clases y de la tradición de la enseñanza de la matemática escolar en Japón. La clase fue codificada en inglés por el profesor Tall. El DVD adjunto a este libro contiene el video de la clase y los video-clips de los siete acontecimientos principales correspondientes. Por otro lado, la sección, al igual que la anterior, desarrolla una secuencia de clases completa, tal como aparecería en una guía para el profesor, de modo que se dispone del ejemplo de una planificación completa en torno a la enseñanza del algoritmo de la multiplicación para su tratamiento en un semestre o más.

Queda fuera de este libro el estudio de la enseñanza de estrategias de cálculo que muchas veces simplifican o bien sustituyen el uso del algoritmo o de la multiplicación vertical. El tema de las estrategias de cálculo es relevante en el proceso de enseñar a multiplicar números naturales, como por ejemplo dividir en 2 y multiplicar por 100 para multiplicar por 50, como también las estrategias para aproximar.

Uso del libro

A investigadores y curriculistas recomendamos leer el libro desde el inicio. A profesores y estudiantes de pregrado instamos a revisar los videos ejemplares. Si el lector inicia la práctica del Estudio de Clases con colegas de su escuela o cercanía, le recomendamos leer primero la clase del profesor Muramoto y darse tiempo para observar con detención y comentar los conceptos tratados en los videos. Se sugiere al lector integrar un grupo de trabajo y mantener sesiones semanales para compartir la lectura, la observación de videos y la reflexión en torno a su experiencia e intenciones de mejoramiento. Los autores instan al lector a que se avoque decididamente a la práctica del Estudio de Clases durante un par de semestres, fijando como contenido central “la

¹ Multiplicación con números de más de una cifra.

enseñanza de los números y sus operaciones” con un foco en la multiplicación de números naturales (eventualmente fraccionarios o decimales).

La siguiente sugerencia para el grupo de lectores que se anime a emprender el Estudio de Clases con apoyo de este libro, es que revise los planes de clases ejemplares según el grado en que se encuentre haciendo clases. Una lectura rápida de los planes les permitirá identificar las principales etapas que involucra el estudio de la multiplicación, valorar la articulación entre las clases y reconocer la situación problema propia de cada clase. La lectura de los planes de clases junto a la práctica docente en torno a ellos llevará al lector a desarrollar autonomía para preparar sus estrategias y materiales de enseñanza y poner en práctica los principios de una clase de resolución de problemas que favorece el aprendizaje de los contenidos curriculares. A medida que el grupo de lectores comprenda el estilo japonés de enseñanza centrado en “la resolución de problemas y las exigencias curriculares” (Isoda, 2000) y sienta que se apropia del mismo, podrá animarse tras un par de meses a que uno de los integrantes experimente una clase pública planeada con dedicación y colectivamente, abierta a la observación de sus pares, para constituir la en una clase a investigar. Luego, el grupo de lectores puede reflexionar en torno a las secuencias de clases centradas en la discusión. Por último, sugerimos revisar la sección que analiza los programas de estudio, puesto que desafía a la reflexión crítica y al espíritu de investigación en la acción, para que fructifique un trabajo propio que beneficie su escuela, entorno y en proyección al país.

Si el lector es un profesor de aula, puede leer superficialmente el primer capítulo y concentrarse en los siguientes. El capítulo I es de interés para los formadores de profesores y autores de texto.

El libro y los videos de clases ofrecen muchas sugerencias para implementar en aula; sin embargo sugerimos que no las copie, sino que se pregunte ¿por qué hacer cambios? Los profesores japoneses mejoran sus prácticas cuestionándose ¿qué mejora la práctica? y ¿cómo mejora?, comparten un currículo, discuten los objetivos y participan en el estudio de clases.

El lector debe ser cuidadoso y distinguir el enfoque de enseñanza japonés de la forma de representación lingüística japonesa, particularmente con respecto al uso del término “veces”. Los ejemplos de este libro aluden a situaciones como “grupos de 2 elementos repetidos tres veces” (3 veces 2), las que se registran “ 2×3 ”, con la unidad de medida o multiplicando a la izquierda. Para una comprensión profunda de estas ideas, por favor, remítase al anexo 2.

INTRODUCCIÓN

El Estudio de Clases y la enseñanza de la multiplicación

El Estudio de Clases, Jugyou Kenkyu, o bien "Lesson Study" según se lo conoce internacionalmente, ha contribuido a la investigación de la enseñanza de la matemática en Japón, impactando las decisiones curriculares nacionales con la mirada realista del profesor, frente a las necesidades y aspiraciones de un país moderno que educa a toda su nación. El Estudio de Clases se ha instalado armoniosamente en el sistema educativo japonés en el marco de la racionalidad y consistencia de un sistema educativo que se perfecciona a sí mismo con ajustes curriculares periódicos, coordinados con la elaboración y distribución de textos escolares nacionales y la formación continua del profesorado.

El Estudio de Clases, como parte de las actividades para el desarrollo del sistema nacional de educación en Japón, contribuye al desarrollo profesional docente, a la implementación del currículo en las aulas y al mejoramiento permanente del currículo. No sería fidedigno afirmar que existe en Japón una única manera de enseñar matemáticas o que en todas las escuelas se enseña con igual profundidad. Pero, lo que sí se puede decir es que existe un cuidado único por hacer las cosas bien, y en ese espíritu, el currículo, los textos, los docentes y los investigadores, son fieles a los saberes de la cultura e innovan en la medida que tiene sentido hacerlo.

En los últimos 60 años el currículo escolar en matemáticas de Japón se ha ajustado a las tendencias internacionales (National Council of Teachers of Mathematics, 1980; 1989) y a las exigencias propias que el mismo país se impone. Cada década el Ministerio de Educación establece una reforma y consecuentemente promueve la implementación gradual en el Sistema con la correspondiente incorporación de los nuevos contenidos en el marco de las licitaciones de textos. Tanto las autoridades gubernamentales a cargo del currículo escolar como las editoriales mantienen contacto con los profesores,

las escuelas experimentales y los Estudios de Clases, y así se mantiene una sinergia que favorece la efectividad en la innovación de la enseñanza de la matemática en Japón. Para una profundización de estas relaciones véase el libro *El Estudio de Clases Japonés en Matemáticas* (Isoda, Mena y Arcavi, 2007).

Teniendo en cuenta la complejidad del fenómeno educativo y la variedad de factores que afecta la organización de los sistemas educativos en el mundo, no es posible establecer simples relaciones de causa efecto entre el Estudio de Clases y la calidad de la enseñanza de un tópico particular. Ambas acciones, el Estudio de Clases y la concreción curricular en el aula, tienen su finalidad propia y se retroalimentan y fortalecen. En ese contexto, declaramos que el Estudio de Clases, como forma de trabajo cooperativo entre profesores, ha posibilitado en Japón fortalecer una educación matemática de calidad internacional, estableciendo vínculos clarísimos entre las delimitaciones curriculares, las tendencias internacionales, la calidad de los textos, y la efectividad de los docentes en la actividad cotidiana del aula.

De este modo, el Estudio de Clases ha dado cabida a un progreso armonioso entre desarrollo curricular y gestión en el aula, contribuyendo en la práctica a la aspiración de ofrecer una educación matemática centrada en la resolución de problemas que se articula con la exigencia del tratamiento de los contenidos establecidos en el currículo y el desarrollo del interés de los alumnos por aprender matemáticas.

En este libro hemos recogido información de la tradición nipona sobre la enseñanza de la multiplicación. Y queremos terminar esta introducción con una máxima en que los educadores estadounidenses han cuestionado su propio actuar:

“Cuando un brillante maestro de América se retira, casi todos los planes de lecciones y prácticas que ha desarrollado también se jubilan. Cuando un profesor japonés se retira, deja un legado.”

PARTE I
La Multiplicación de los naturales
en el Currículo

Nuevo marco para la enseñanza de la multiplicación

En las últimas décadas, los países han redefinido las metas para las Escuelas Primarias en todas las áreas, dando prioridad a destrezas complejas como la resolución de problemas y la comunicación por sobre los conocimientos aislados.

Con respecto a las matemáticas se han identificado metas como “hacer conexiones entre la aritmética y la experiencia cotidiana, adquirir destrezas básicas, comprender el lenguaje matemático y aplicarlo en situaciones prácticas, reflexionar sobre las actividades matemáticas y chequear los resultados, establecer relaciones, reglas, patrones y estructuras, y describir y utilizar estrategias de investigación y de razonamiento” (Treffers et al., 2001).

En esta línea se ha desarrollado un vocabulario con términos propios, entre los que figuran:

Contexto. El contexto es un evento, asunto o situación derivada de la realidad, el cual es significativo para los niños o el cual ellos pueden imaginar. Los niños usan métodos matemáticos a raíz de su propia experiencia. El contexto provee significado concreto y da la base para las relaciones matemáticas relevantes u operaciones que realiza el niño. Las situaciones podrían ser esquematizadas desde experiencias cotidianas tales como viajar en bus, comprar y manejar dinero. El contexto también puede ser encontrado en el mundo de las matemáticas en sí mismo, como en el caso de las propiedades de los números primos, dando origen a contextos aritméticos o matemáticos.

Contextualización. La contextualización significa dar significado a los números y operaciones relacionándolas a las situaciones significativas de cada día, el mundo real o el mundo significativo de los niños. Por ejemplo, al resolver

63-47 un estudiante podría pensar en una diferencia entre edades de personas, porque dos personas tendrán la misma diferencia de edad en tres años, el problema podría ser reemplazado por 66-50, el cual es más fácil de resolver. En esta forma un problema formal es contextualizado en una situación de edades.

Destrezas básicas. En el dominio de las destrezas básicas se considera: el conteo hacia delante y atrás con distintas unidades, el conocimiento de las tablas hasta 10 en suma y multiplicación, la realización de tareas aritméticas simples usando eficientemente el conocimiento acerca de las operaciones, el hacer estimaciones en operaciones aritméticas para determinar un resultado aproximado, alcanzar comprensión de la estructura de los números naturales y entender las posiciones del sistema de numeración decimal, hacer uso inteligente de la calculadora, y modelar problemas simples en términos matemáticos.

Hacer aritmética concreta. Hacer operaciones aritméticas o razonamiento concreto significa hacer la operación mientras es fácil de imaginar. Esto a menudo da un incremento de la comprensión en tales operaciones y razonamientos de un contexto práctico o situación. Por ejemplo, cuando se tiene en mente un arreglo rectangular para mostrar que 12×25 es igual a 6×50 .

Memorización. La memorización es la asimilación del conocimiento: aprendizaje de los números y resultados aritméticos tales como los productos de las tablas de multiplicación por intuición y luego ser capaces de recordarlas cuando ellas se requieran. La memorización es a menudo el acto final en un proceso de aprendizaje en el cual las operaciones son graduales y en creciente eficiencia llevadas a niveles cada vez más altos. Por ejemplo, se dice que un estudiante ha memorizado 7×8 si conoce directamente que es 56, sin tener que trabajarlo conscientemente.

Modelo de contextos. Un modelo de contexto es una situación que puede mantenerse para un rango completo de situaciones aritméticas relacionadas. En ellas las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división están reflejadas significativamente. Tal contexto puede ofrecer soporte en llevar adelante un cálculo y desarrollar un procedimiento. La moneda es un ejemplo de uso de contexto para el cálculo en columnas. El cálculo formal adquiere significado para los niños si pueden descomponer una cantidad de monedas en monedas de \$ 100, \$10 y \$1.

- El principio de extensión para la enseñanza de la multiplicación

La enseñanza de la matemática escolar tiene entre sus propósitos más usuales que los alumnos adquieran conceptos y luego los re-conceptúen en ámbitos explicativos más generales. Por ejemplo, los alumnos adquieren la noción de número y sus operaciones en ámbitos cada vez más extensos, con números naturales, decimales fraccionarios y enteros. Este proceso de extensión está ligado a la profundización de los objetos de aprendizaje y la provisión de nuevas representaciones de los mismos.

Para enseñar la multiplicación con números naturales, el primer paso es favorecer la comprensión del producto como cantidad de elementos o medida resultante de grupos de igual número de elementos o medidas que se repiten, lo que se refiere a un caso particular de la proporcionalidad. Importa la extensión del concepto "la unidad" y ello se hace a partir de la idea de grupo. Luego se estudia las tablas de multiplicar, esto es, la proceduralización del concepto con números de una cifra. Primero, las tablas del 2 al 5, luego del 6 al 9 y la multiplicación por 1. Luego vendrá la multiplicación por 0 y por 10.

Desde el estudio de la tabla del 6 en adelante se constata la propiedad $A(x+1) = Ax + A$, con $A=6, 7, 8, \text{ y } 9$, para x variando de 1 a 9, propiedad distributiva. Luego el alumno es inducido a descubrir la conmutatividad en la tabla, facilitando con ello la memorización de las tablas y proveyéndole un método de verificación. Finalmente, el alumno comprueba la asociatividad en la tabla.

En ambos procesos, en el de conceptualización y en el de proceduralización, el profesor procura que los niños provean argumentos, algunos de ellos descriptivos y otros deductivos. El profesor también espera que durante el proceso de verbalización en público, los alumnos aprendan unos de otros, sean capaces de entender los puntos de vista de sus compañeros y de relacionarlos con las ideas propias.

En Japón, la enseñanza de la multiplicación entre números de una cifra se lleva adelante en el segundo semestre de 2º grado. En tercer grado se continúa con la idea de extensión conceptual. Los alumnos exploran estrategias y aprenden métodos para multiplicar números naturales que se expresan con más de una cifra; primero, decenas por unidades ($D \times U$), decenas por decenas ($D \times D$) y otras combinaciones, como $DU \times D$, incluyendo múltiples aproximaciones.

En 4º grado, la extensión a los decimales pone el foco en la representación de

la multiplicación por medio de medidas proporcionales en rectas paralelas. Luego se extiende a las fracciones y en los cursos superiores con números negativos. En todos estos casos se extiende el uso del término “veces” al contexto de medidas de trazos proporcionales. En 3° grado la extensión es de números de una cifra a más de una cifra. Esto lleva a la conveniencia de disponer de nuevas formas para multiplicar, ya no cabe continuar con la memorización y se hace conveniente disponer de estrategias escritas, como por ejemplo, la forma vertical de la multiplicación y en definitiva un algoritmo.

La extensión que implica operar con números decimales va más allá de la representación, incluye un cambio en el objeto sobre el cual se actúa, se opera sobre parte del todo, se redefine la unidad de medida o unidad de conteo, se trata de una extensión conceptual. La representación decimal de los números agrupando en unidades, decenas y centenas da origen al sistema de representación decimal de los números. Noción que es ampliada luego con los números decimales y finalmente a la noción de número real como elemento de un continuo que representa a una medida.

La multiplicación con naturales en el currículo de 8 países²

Esta sección muestra cómo se estructura la multiplicación en los programas de una variedad de países de Asia y América (Isoda y Olfos, 2008). La comparación muestra lo estrictamente detallado y secuencial de los programas del Medio Este asiático en relación a los de países de América.

La comparación se atiene a Singapur (Sg), Hong Kong (Hk), Corea (Ko), Japón (Jp), México (Mx), Colombia (Co), Perú (Pe) y Chile (Cl), y se restringe al ámbito de números naturales. Todos estos países establecen entre sus metas que los alumnos entiendan el significado de la multiplicación y ganen fluencia en el cálculo. El logro de estas metas se establece en un rango que varía entre tres y cinco semestres. Para alcanzar la meta cada país tiene su estrategia, mientras unos parten en el segundo semestre de primero básico, otros parten en el primer semestre de tercero. En algunos países se trabajan unidades que integran el aprendizaje de la multiplicación con el de la división, mientras que en otros se intercalan unidades referidas a un contenido y luego al otro.

Las fuentes de información provienen de los Programas de Estudio vigentes a

² En APEC se usa el término economía en vez de país, debido a la situación especial de las economías de Taipei y Hong Kong.

junio de 2008, a excepción de México, para el que se consideran los programas del 1994 debido al acceso restringido a sus Programas actuales. Los datos de Colombia provienen de un currículo basado en competencias, estructurado en ciclos trianuales y no por grados (García, 2008). Razón por la que existen vacíos con respecto a la temporalidad de la adquisición de los contenidos.

La comparación se centra en cuatro aspectos de la enseñanza de la multiplicación con números naturales, estos son:

- La multiplicación y la extensión del ámbito numérico.
- La introducción al concepto de multiplicación.
- El descubrimiento y memorización de las tablas.
- El aprendizaje de la multiplicación multidígito.

En la comparación queda fuera la relación entre la división y la multiplicación, uso de calculadora, estudio de múltiplos y operaciones combinadas.

El primer tema explorado es el sentido dado al número en el contexto de la conceptualización de la multiplicación. Se constata que en los distintos Programas de Estudio el número es tratado como cantidad discreta y como símbolo para representar cantidades específicas. Sólo algunas veces los números hacen referencia a medidas de longitud u otra magnitud.

A continuación se señalan características distintivas del enfoque dado a la enseñanza de la multiplicación en cada país.

En Corea (Korea Ministry of Education, 2006), la enseñanza de la multiplicación se inicia en segundo grado según las siguientes metas:

- Comprender las situaciones para -y el significado de- la multiplicación.
- Comprender la tabla y multiplicar números de una cifra.
- Tratar el significado de la multiplicación como suma iterada o como el concepto de múltiplo, y relacionarlo con lo cotidiano.

En Singapur (Curriculum Planning and Development Division, 2006), la enseñanza de la multiplicación se inicia en primer grado:

- La multiplicación es tratada como adición repetida en un ámbito de números hasta el 40.
- Se utiliza el símbolo de multiplicación (\times) en una sentencia matemática para representar una situación dada.

- Se excluye, en este nivel, el uso de las tablas de multiplicar.

En Hong Kong (Education Bureau Hong Kong, 2007), la extensión del ámbito numérico de 1° a 4° grado es exhaustiva:

- Primero se tratan números hasta 10, luego hasta 20 y hasta 100. Luego, conforme pasan los meses y años se tratan números de 3 cifras, de 4 y luego de 5.
- En segundo grado se desarrolla un concepto básico de multiplicación: multiplicar números de una cifra por números de dos o tres cifras en el multiplicando.

En Japón (Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology, 2003):

- La multiplicación se inicia en segundo grado bajo el modelo (número para la unidad) x (veces que se repite la unidad) = (total).
- En 2° grado se comprenden propiedades de la tabla de multiplicar, como la conmutatividad.
- En 3° grado se enseña la multiplicación con multidígitos y la extensión de las propiedades de la tabla.

En México (Gobierno de México, 1993), la enseñanza de la multiplicación se iniciaba en 2° grado, bajo la siguiente orientación:

- Introducción a la multiplicación mediante resolución de problemas que impliquen agrupamientos y arreglos rectangulares, utilizando diversos procedimientos.
- Escritura convencional de la multiplicación (números de una cifra).
- Construcción del cuadro de multiplicaciones.

En Perú (Gobierno del Perú, 2005), la multiplicación según los Programas se inicia en 1° grado, y se espera que el alumno aplique agrupaciones y suma repetida para situaciones que implican la noción de doble o triple.

Para el 2° grado, se espera que el alumno:

- Interprete la multiplicación de dos números naturales.
- Resuelva problemas de multiplicación de números de una sola cifra, y de números de una cifra por 10.
- Interprete y calcule el doble de un número natural menor que 100 y la mitad de un número par menor que 100.

En Colombia, los Programas dan una descripción genérica e integrada en un currículo diseñado por competencias. Para un período de tres años (nivel inicial) se explicitan las siguientes competencias:

- Describo, comparo y cuantifico situaciones con números, en diferentes contextos y con diversas representaciones.
- Describo situaciones que requieren el uso de medidas relativas.
- Reconozco propiedades de los números (ser par, ser impar, etc.) y relaciones entre ellos (... , ser múltiplo de, ser divisible por, etc.) en diferentes contextos.
- Resuelvo y formulo problemas en situaciones de variación proporcional.
- Uso diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.

En Chile, el Programa de Estudio es muy detallado, incluyendo aprendizajes esperados y ejemplos de actividades de aprendizaje y de evaluación.

En la descripción de los ejemplos de actividades propuestas a los alumnos en 3° grado (MINEDUC, 2003), se expresa:

- En situaciones de carácter multiplicativo planteadas por el profesor determinan, a través de sumas reiteradas, la cantidad total de elementos que conforman un todo si conocen la relación entre un elemento y el conjunto de elementos asociado a él (relación "uno a varios"). Para representar los objetos a los que se refiere el relato, pueden utilizar fichas u otros objetos manipulables.
- Se vende libros que contienen 10 figuras recortables cada uno. Si un niño compró 3 de esos libros, ¿cuántas figuras tendrá para recortar?
- Posteriormente el profesor resume lo realizado, rotula la operación como multiplicación y la expresa simbólicamente como (número de veces en que se repite el elemento unitario) (por) (el valor asociado al elemento unitario) (es igual) (al valor asociado a la nueva cantidad de elementos) lo que, en los casos descritos...

Al comparar los enunciados de los Programas de los países de América con los de países de Asia considerados aquí, se constata que en los primeros se da más importancia a las variaciones del contexto para la conceptualización,

sin atender otras variables de interés didáctico, como lo son la amplitud del ámbito numérico y la formación del sistema de representación.

- Paralelo en torno al tratamiento de la multiplicación

Las siguientes tablas muestran tendencias internacionales y destacan las diferencias en aspectos específicos en el tratamiento de la multiplicación según los Programas de los distintos países.

Al interior de las celdas de cada tabla, los números 1, 2, 3 y 4 indican el nivel en que es tratado el tema. El número 1' indica que el tema es tratado en el segundo semestre del 1° grado.

Además se usa la siguiente simbología:

- (guión) : La información requerida no es precisada en el Programa.
- C : La información se refiere a todo el Ciclo y no explicita el nivel.
- / (slash) : La información es la misma del nivel siguiente.
- (Espacio): No hay información al respecto.

- Comparación referida a la extensión del ámbito numérico

País o economía	Mx 94	P e	C o	C l	K o	H K	S p	J p
< 40	-	-	-	-	-	-	1	-
< 100	1	1	-	1	1	1	1'	1
< 1000	2	2	C	2	2	1'	2	2
< 10000	3			3	3	2	3	3

Nótese que el Programa de Singapur es el único que establece que en el primer semestre de 1° grado se trate la multiplicación con números hasta 40.

- Comparación referida al significado dado a la multiplicación

País o economía	Mx 94	P e	C o	C l	K o	H K	Sp	J p
Suma repetida	-		C	3	1		1	-
Grupo como unidad	2	-	C	3	2		2	1
Proporcionalidad	-	1		3	2	2	/	2
Uso de dibujo	-	2	C	3	1	/	/	2
Arreglo	2		-	4	2	/	/	2

Nótese que Chile es el país que inicia más tardíamente el estudio de la multiplicación (Referencia: currículo a julio del 2008).

- Comparación referida al uso de sentencias simbólicas y al uso de las palabras multiplicando y producto

País o Economía	Mx 93	P e	C o	C l	K o	H K	S p	J p
Frase matemática	-		-	3	1	2	1	2
Uso símbolo x	2			/	2	/	/	/
Términos:								
Multiplicando		3		-	2		2	2
Producto	2	3	c	3	2	3	3	2

- Comparación referida al grado en que son tratadas las tablas de multiplicar

País o Economía	Mx 93	P e	C o	C l	K o	H K	S p	J p
Tablas 2 y 5	2	2	C	3	2	2	2	2
Tablas 3 y 4	/	2	/	3	2	/	2	2
Tablas 6 y 8	/	2	/	3'	2	/	3	2
Tablas 7 y 9	/	2	/	4	2	/	3	2
Multiplica por 10	3	2	C	3	3	3	2	2

- Comparación referida a la multiplicación de números con más de una cifra

País o Economía	Mx 93	P e	C o	C l	K o	H K	S p	J p
DU x U	2	2	C	4	3	3	3	3
CDU x U	2	3	/	4	3	3	/	3
MCDU x U	/	3	/	4	3	4	4	4
DU x DU	3	3	/	4	3	4	4	3
CDU x DU	3	3	/	4	3	4	4	3

Síntesis del paralelo en torno al tratamiento de la multiplicación:

- Existen varias diferencias en las formas y momentos en que es tratada la multiplicación en los distintos niveles y países.
- Los Programas de las economías asiáticas fijan con mayor precisión distintas restricciones para el tratamiento de la multiplicación.
- Los países americanos privilegian los significados, destacan la multiplicidad de los significados y a veces presentan ambigüedades. Eventualmente, esta situación se vincula a la heterogeneidad propia de estos países, tanto en lo cultural como étnico y socioeconómico.
- El formato del programa de México es el más parecido al formato de los programas de las economías de Asia. El Programa de Perú muestra un escaso desarrollo curricular y un enfoque muy formal de la mate-

mática, como lo mostraron las tendencias internacionales en los años 1960 a 1970. La información que entrega el Programa de Colombia por un lado es insuficiente para garantizar una enseñanza homogénea en el país, y por otro es coherente con principios de vanguardia en la educación matemática internacional. El Programa de Chile está recargado combinando distintos enfoques y una variedad de ejemplos, desperfilando las conexiones y la optimización de la labor docente.

- En los países americanos los profesores y autores de texto enfrentan un currículo recargado que les implica una ardua tarea y alta responsabilidad en la toma de decisiones curriculares.
- Los programas de los países asiáticos están más centrados en los objetos matemáticos que en sus representaciones. Los programas de Corea tienen un eje para modelos, de modo que la multiplicación es estudiada desde dos puntos de vista que se complementan. Singapur tiene el Programa más estructurado, con pequeños bloques de contenidos conectados entre sí. Tanto los Programas de Hong Kong como los de Singapur enfatizan los aspectos estructurales del currículo, fijando incluso los conceptos que no deben ser tratados antes de tiempo.
- A modo de síntesis, se aprecia que las economías asiáticas consideradas en este estudio muestran mayor coherencia y conexión entre los contenidos de los Programas, y que el principio de extensión es clave para el diseño curricular en matemáticas.

Organización de la multiplicación en la guía para el maestro y en los textos escolares japoneses

En el transcurso de la última década, en la cual la comunidad internacional ha fijado su atención en el Estudio de Clases, los educadores matemáticos de América y Europa han mostrado interés en profundizar sobre el apoyo del gobierno de Japón a sus profesores con materiales concretos, guía para docentes y textos escolares. Ello ha llevado paulatinamente a la traducción de varios documentos desde el japonés. Así, en el 2005 fue traducida por primera vez al inglés La Guía para la Enseñanza de la Matemática Escolar editada por el Ministerio de Educación, Cultura y Deportes de Japón, "Elementary School Teaching Guide for the Japanese Course of Study: Arithmetic (Grade 1-6)". Esta guía hace referencia a los objetivos y contenidos de enseñanza para cada grado, da indicaciones para la construcción de los planes de ense-

ñanza y provee sugerencias a los profesores con respecto al tratamiento de los contenidos.

La disponibilidad de la versión en inglés editada el 2006 de la “Guía de Matemáticas de primaria para profesores japoneses” del año 1999, los textos escolares editados en inglés por las editoriales Gakkoh Tosho (Nara, 2006) y Tokyo Shoseki (Hironaka y Sugiyama, 2006), y las guías para maestros elaboradas por especialistas hondureños con el apoyo de especialistas japoneses, haciendo referencia a libros de texto japoneses y editadas en español en el marco del proyecto PROMETAM (2005, 2007) en Honduras, auspiciado por JICA (Agencia de Cooperación Internacional del Japón), constituyeron fuentes en español para comprender las orientaciones de la enseñanza de la multiplicación en Japón.

Fuentes complementarias están constituidas por planes de clases y algunas publicaciones de docentes investigadores japoneses e investigadores de reconocimiento internacional que han participado en los últimos 4 años en el marco de la cooperación internacional del foro APEC (<http://criced.tsukuba.ac.jp/math/apec>).

El análisis que hemos realizado en torno a la organización de la aritmética en el currículo japonés muestra coherencia entre la ampliación del ámbito numérico y la introducción de la multiplicación de los números naturales. En efecto, se introduce en segundo básico la multiplicación, cuando el alumno está iniciando el estudio de las decenas y centenas. De este modo rápidamente el programa oficial, Guía de Enseñanza, integra la notación decimal con las operaciones de suma y de multiplicación, lo que favorece en el alumno la comprensión de los algoritmos de operación.

La Guía de Enseñanza presenta la siguiente secuencia para los primeros tres grados:

	Números	Las cuatro operaciones
1º grado	De dos cifras	<ul style="list-style-type: none"> • Adición y sustracción de números de una cifra y casos simples de dos cifras
2º grado	De cuatro cifras	<ul style="list-style-type: none"> • Adición y sustracción • Concepto de multiplicación • Tabla de multiplicar y sus propiedades
3º grado	De seis cifras	<ul style="list-style-type: none"> • Multiplicación • División con una cifra en el divisor • Adición y sustracción simples con números decimales y fracciones.

- *Secuenciación en la enseñanza de la multiplicación*

Los textos escolares, consistentes con los programas de estudio y las evidencias de la práctica del Estudio de Clases, dejan ver algunas regularidades en la secuenciación de la enseñanza de la multiplicación. Las regularidades llevan a la identificación de elementos comunes en las unidades, secuencias o lecciones de los textos.

Las secuencias observadas en distintos textos permiten identificar dos grandes etapas en la enseñanza de la multiplicación de números naturales, a saber:

- 1 El concepto de multiplicación y las tablas con sus propiedades.
- 2 Las estrategias para multiplicar números de más de una cifra y el algoritmo de la multiplicación.

Los textos de la editorial Gakkoh Tosho (2006) establecen la secuencia siguiente:

Fase 1: Segundo semestre de Segundo grado

(Ámbito de números hasta el 100). Situaciones asociadas a la multiplicación. En primer lugar la multiplicación $\times 2$, $\times 3$, $\times 4$ y $\times 5$. Luego, la multiplicación $\times 6$, $\times 7$, $\times 8$, $\times 9$ y $\times 1$.

Identificación de propiedades en la tabla (de los múltiplos de 5, casos de asociatividad).

Fase 2: Primer semestre de Tercero grado

(Números hasta 1000, arreglos de 10 y de 10×10). Más propiedades: Conmutatividad. Aumento y decremento constante en tabla. Distributividad. Multiplicación $\times 0$, $\times 10$ y $\times 100$. Multiplicación de números de 1×2 cifras. Multiplicación vertical de 2×1 cifras, de 3×1 cifras. Multiplicación mental de 2×1 cifras. Multiplicación escrita de 4×1 cifras.

Fase 3: Segundo semestre de Tercero grado

(Ámbito de números mayores que 1000). Multiplicación de 2×2 cifras. Situaciones que llevan a la forma vertical abreviada.

El texto del primer semestre de segundo grado de la editorial Gakkoh Tosho trata cómo medir longitudes en cm antes de la Fase 1 del estudio de la multiplicación, por lo que las situaciones que hacen referencia a cantidades en la fase 1 consideran cantidades discretas y medidas muy simples, como trozos de cinta de dos centímetros de longitud. En general, las situaciones que llevan a la conceptualización de la multiplicación hacen referencia a

platos con frutas, bolsas con dulces, grupos de personas y representaciones como filas y columnas de bolas o círculos y torres o columnas de cubos. La representación por medio de torres de cubos facilita la visualización de las medidas de longitud, tema que se retoma tras la primera Fase del estudio de la multiplicación.

Los textos elaborados en español para Honduras en el proyecto PROMETAM, fueron ideados por profesores japoneses. Estos textos muestran una secuencia algo diferente a la de la editorial antes referida. Por ejemplo, al tratar la multiplicación por 7 en el texto del maestro se hace la siguiente observación “De ahora en adelante aparece en los problemas las cantidades continuas...” Otra diferencia con la secuencia referida es el momento en que se enseña a multiplicar por cero. La multiplicación por 0 es tratada junto a la multiplicación por 1, en cambio en la secuencia de la editorial Gakkoh Tosho la multiplicación por cero se realiza en la Fase 2, tras deducir las propiedades de la tabla de multiplicar.

Si bien existen entre los textos de distintas editoriales y años variaciones en el orden y diferencias en las variables que determinan el avance conceptual, se observa que los textos evitan introducir conceptos usando nociones no trabajadas previamente por el alumno. Esto es, las secuencias de enseñanza son estrictas con respecto al análisis de tareas que implica su diseño.

En los textos del proyecto PROMETAM se presenta una unidad en segundo grado con 5 lecciones, otra unidad en tercer grado con 3 lecciones y otra en cuarto con 4 lecciones.

Multiplicación en Segundo grado:

Primera lección: Concepto, símbolo y operación de la multiplicación. Segunda lección: La construcción y memorización de las tablas del 2, 5, 3 y 4. Tercera lección: Construcción y memorización de las tablas del 6, 7, 8 y 9. Cuarta lección: La multiplicación con 1 y con 0. Quinta lección: La tabla de la multiplicación, la conmutatividad en la tabla y la regularidad del incremento en la tabla según el multiplicando.

Multiplicación en Tercero grado:

Primera lección: Multiplicación de múltiplos de 10 y 100 por unidades. Segunda lección: Multiplicación de números de dos cifras por números de una cifra. Tercera lección: Multiplicación de números de tres cifras por números de una cifra.

Multiplicación en Cuarto grado:

Primera lección: Multiplicación de números de 4 ó 5 cifras por números de una cifra. Segunda lección: Multiplicación de decenas por centenas. Tercera lección: Multiplicación de números de dos cifras entre sí. Cuarta lección: Multiplicación de números de tres cifras entre sí.

Los textos 2006 en inglés de la editorial Tokyo Shoseki también inician la multiplicación en segundo grado, sus unidades son:

Fase 1: Segundo semestre de segundo grado

(Ámbito de números hasta el 1000) Concepto de multiplicación. Multiplicación $\times 2$, $\times 5$, $\times 3$ y $\times 4$. Multiplicación $\times 6$, $\times 7$, $\times 8$, $\times 9$ y $\times 1$ y propiedades de la tabla.

Fase 2a: Primer semestre de tercero grado

(Números hasta 1000) Multiplicación por 0. Propiedad Conmutativa y del aumento constante en la tabla. Multiplicación de unidades por decenas y centenas.

Fase 2b: Primer semestre de tercero grado

(Incluye números mayores que 1000) Multiplicación con números de 2 cifras y de 1 cifra. Multiplicación con números de 3 cifras y 1 cifra.

Fase 3: Segundo semestre de tercero grado

(Ámbito de números mayores que 1000) Multiplicación por decenas. Multiplicación de números de 2 cifras entre sí. Cálculo mental.

Fase 4: Primer semestre de cuarto grado

(Ámbito de números mayores que 1000) Multiplicación números de 3 cifras entre sí. Multiplicación de múltiplos de 10 y múltiplos de 100. Propiedad distributiva y el algoritmo de la multiplicación.

Orientaciones gubernamentales para la enseñanza de la multiplicación en Japón y en Chile

De la Guía para la Enseñanza se desprende que los profesores en Japón deben enseñar la multiplicación de números naturales en segundo y tercer grado. En segundo grado se estudia el significado de la multiplicación, las tablas de multiplicar y sus propiedades. Las orientaciones curriculares establecen que más allá de la memorización los alumnos construyan por sí mismo las tablas en función de su significado y el conocimiento previo de la adición. Para

tercer grado, los Programas establecen que se estudie la multiplicación de números de hasta tres cifras por números de dos cifras. De este modo, y en conformidad a los textos escolares revisados, la multiplicación es enseñada en un lapso de 3 semestres a partir del segundo semestre de segundo grado.

Esta organización del contenido difiere de la propuesta en los programas de estudio en Chile, según los cuales la enseñanza de la multiplicación de números naturales se inicia en tercero básico y se termina en quinto básico, en un lapso de 5 semestres. Se aprecia que en Japón la enseñanza de la multiplicación se realiza en menos tiempo y se comienza con niños de menor edad. Además, se logran aprendizajes más eficientes, según lo corroboran estudios internacionales. Existen varias razones que explican este fenómeno, entre ellas se destaca la idiosincrasia del pueblo japonés que vela por una educación de calidad para su población, y en ello estriba una organización curricular minuciosa, estrategias de enseñanza coherentes, apoyo de los padres y un soporte institucional gubernamental que garantiza condiciones de vida básica para toda su población escolar. No se trata sólo de recursos económicos, pues países con niveles económicos similares no siempre tienen los mismos logros. El Estudio de Clases ha favorecido la concreción de un currículo nacional articulado y de estrategias de enseñanza eficientes, las cuales se ponen de manifiesto en los textos de enseñanza y planes de clases, como podrá apreciarse en las siguientes páginas.

- Orientaciones desde la Guía para la enseñanza en Japón

La componente aritmética (entiéndase matemática) de la Guía para la Enseñanza ofrecida por el Ministerio de educación de Japón (MEXT, 1999), traducida el 2005 al inglés, señala tres objetivos de la asignatura de matemáticas para segundo grado, los que se refieren a números, cantidades y figuras geométricas. El objetivo referido a los números dice: "A través de actividades, tales como la manipulación concreta, ayudar a los niños a profundizar su comprensión del concepto y representación de los números. Además, ayudarlos a comprender la adición, sustracción y multiplicación, y a que sean capaces de hacer cálculos básicos como también ayudarlos a hacerlos capaces de aplicarlos adecuadamente". Para tercer grado, se formulan 4 objetivos, incorporando a los temas anteriores un objetivo referido a manejo y representación de datos. El objetivo referido a los números dice: "Ayudar a los niños a ser capaces de usar números decimales y fracciones para representar en

el tamaño de las cantidades. Además, ayudarlos a entender el significado de la multiplicación y división de números enteros y que sean capaces de hacer cálculos básicos, como también ayudarlos a apreciar su utilidad y ser capaces de aplicarlos correcta y eficientemente de acuerdo a sus propósitos”.

Con respecto a los contenidos en la dimensión “números y operaciones”, la guía establece que:

“El significado de la multiplicación y dónde usarla han de enseñarse en segundo grado. La multiplicación se define primero encontrando el tamaño de una unidad y luego encontrando el valor de las cantidades de un cierto número de unidades. Los resultados de la multiplicación pueden ser encontrados por sumas iteradas. En este nivel es importante dominar la tabla de multiplicar y la multiplicación de números de una cifra.

En tercer grado, se espera que los niños entiendan el significado de la división y donde es usada. La división incluye el caso de división por partición y el caso de la división por cociente. Para describir esto con respecto a la multiplicación, que se explicó arriba, uno corresponde a encontrar la cantidad por una unidad, y el otro corresponde a encontrar la cantidad de una unidad en un número. Sin embargo, la misma operación puede ser usada para ambas situaciones, y es deseable que los niños puedan considerar ambas situaciones como una operación.

Es importante saber que la multiplicación es la operación inversa de la división, y que uno puede chequear el cálculo de una operación usando la otra operación”.

... “Los niños debieran ser capaces de entender la multiplicación como (cierto monto de una unidad) x (tamaño proporcional en la unidad) = (monto total)”.

... “Para la multiplicación y división de números enteros, es importante dominar la multiplicación con multiplicandos de tres cifras en tercer grado.

... “Para cálculos que usen números con más de 3 cifras, es importante animar a los niños a encontrar cómo resolverlos por ellos mismos, usando lo que ya han aprendido. Se recomienda evitar, en los cursos superiores, cálculos complejos y animar a los niños a usar calculadora a partir de quinto básico. Para el cálculo mental, es necesario que sean capaces de multiplicar números de una cifra por números de 2 cifras en tercer grado”.

“En segundo grado debieran ser capaces de entender y utilizar la propiedad distributiva y la propiedad conmutativa de la multiplicación”.

“En tercer grado debieran entender y ser capaces de usar para calcular multiplicaciones la propiedad asociativa de la multiplicación y particularmente $Mx(N+U) = MxN+MxU$, con $U=1$ o $U=-1$ ”.

- Orientaciones para enseñar la multiplicación en Chile

Cabe plantear la pregunta ¿en qué difieren las guías oficiales para la enseñanza ofrecidas en Japón a las ofrecidas en Chile? Existen diferencias como “en Chile se sugiere enseñar la multiplicación y la división al mismo tiempo; se sugiere estudiar la tabla del 10, y no la del 3 y del 4, tras estudiar las tablas del 2 y del 5; se sugiere iniciar el estudio de la multiplicación como un modelo que hace referencia a proporcionalidad; se sugiere estudiar la multiplicación atendiendo a la vez a las magnitudes y a las cantidades discretas...” ¿Son estas sugerencias claves en la diferencia de logros de aprendizaje por parte de los niños de estos dos países? O bien, ¿esas son sólo diferencias de forma que no afectan los niveles de logros? Es posible que la clave no esté en qué se haga primero o qué se enfatice más, sino más bien en la coherencia interna del sistema de sugerencias que se le provean al profesor. Eventualmente, más allá de las sugerencias ofrecidas, importaría entender cómo las sugerencias se relacionan entre sí, se potencian y no llevan a conflictos.

Por ejemplo, para que los niños comprendan la multiplicación los profesores recurren a situaciones en que los niños piensan en cantidades discretas y cantidades continuas (representadas por medidas). El tema de las magnitudes es clave en el currículo japonés, constituyéndose en uno de los ejes o dimensiones del currículo. En Chile, ese tema es tratado en el subsector de “medio social y natural”. Al revisar los Programas de Estudio de primer y segundo básico chilenos, por ejemplo, se aprecia el uso no técnico de palabras como “cantidad”, “medida”, “magnitud”. Esto es, se usan como parte del vocabulario del profesor adulto y no se consideran como objetos de enseñanza. Se hace referencias a ejemplos con metros, centímetros y litros, y no se considera el significado que esas palabras pueden tener para el alumno. ¿Serán esos detalles importantes en el momento de buscar explicaciones a por qué los niños aprenden más rápido, a menor edad y con mayor efectividad la multiplicación en Japón?

A continuación se presentan algunos antecedentes acerca de las sugerencias

que proveen el Marco Curricular y los Programas de Estudio en Chile con respecto a la enseñanza de la multiplicación de números naturales. Esta presentación tiene dos objetivos en el contexto de este libro. Por un lado, provee información a los profesores chilenos para que atiendan a las exigencias del currículo nacional cuando lleven adelante Estudio de Clases en torno a la enseñanza de la multiplicación, y por otro lado, esta información les favorece la reflexión para mejor entender los aspectos en que difiere la enseñanza de la multiplicación en Japón frente a la propuesta en Chile, de modo que no se cometa el error de simplificar el Estudio de Clases tendiendo a copiar las estrategias que se usan en Japón sin considerar que los alumnos de segundo básico y los mismos profesores en Chile tienen conocimientos previos diferentes a los que se manejan en Japón. Cabe reiterar en este momento que el Estudio de Clases es una herramienta para el desarrollo profesional docente, que de suyo lleva a mejores clases y que favorece el mejoramiento de los planes de clases y las propuestas curriculares a nivel de escuela y, a futuro, a mejores programas de estudio en el país.

- Orientaciones desde el Marco Curricular en Chile

El Marco Curricular en Chile, Decreto Supremo 232 (MINEDUC, 2002), establece los objetivos fundamentales y los contenidos mínimos obligatorios, para los distintos niveles escolares. Con respecto a la enseñanza de la multiplicación de números naturales establece:

Objetivos fundamentales del Nivel Básico 2 (correspondientes a tercero y cuarto básico):

- Identificar a la multiplicación como operación que puede ser empleada para representar una amplia gama de situaciones y que permiten determinar información no conocida a partir de información disponible.
- Realizar cálculos mentales de productos utilizando un repertorio memorizado de combinaciones multiplicativas básicas y estrategias ligadas al carácter decimal del sistema de numeración y a propiedades de la multiplicación.
- Realizar cálculos escritos de productos utilizando procedimientos basados en la descomposición aditiva de los números y en propiedades de la multiplicación, usando adecuadamente la simbología asociada a esta operación.

- Estimar el resultado de una multiplicación, a partir del redondeo de los términos que intervienen en ella.
- Utilizar la calculadora para determinar productos, cuando la complejidad de los cálculos así lo requiera.
- Formular afirmaciones acerca de propiedades de la multiplicación, a partir de regularidades observadas en el cálculo de variados ejemplos.
- Comparar la multiplicación con otras operaciones estudiadas en cuanto a su significado y a las propiedades utilizadas en los cálculos.

Objetivos fundamentales del Nivel Básico 3 (correspondiente a 5to básico):

- Resolver problemas de diversos tipos, referidos a situaciones multiplicativas.
- Seleccionar una forma de cálculo -oral, escrito o con calculadora- a partir de las relaciones entre los números y las exigencias del problema por resolver.
- Aplicar el cálculo aproximado en la evaluación de situaciones y el control de resultados.

Contenidos mínimos obligatorios para tercero y cuarto básico (Nivel Básico 2):

- Asociación de situaciones correspondientes a una adición reiterada, un arreglo bidimensional (elementos ordenados en filas y columnas) y una relación de proporcionalidad (correspondencia uno a varios) con la multiplicación.
- Utilización de multiplicaciones para relacionar la información disponible (datos) con la información no conocida (incógnita), al interior de una situación de carácter multiplicativo.
- Descripción del significado de resultados de multiplicaciones en el contexto de la situación en que han sido aplicadas.
- Manipulación de objetos y representación gráfica de situaciones multiplicativas y utilización de técnicas tales como adiciones reiteradas, para determinar productos.
- Combinaciones multiplicativas básicas: memorización paulatina de multiplicaciones con factores hasta 10 (Ejemplo: $3 \times 4 = 12$), apoyada en manipulaciones y visualizaciones con material concreto.
- Multiplicación de un número por potencias de 10 (Ejemplo: $23 \times 1\,000 = 23\,000$).

- Cálculo mental de productos utilizando estrategias tales como: descomposición aditiva de factores (Ejemplo: 25×12 como $25 \times 10 + 25 \times 2$), descomposición multiplicativa de factores (Ejemplo: 32×4 como $32 \times 2 \times 2$), reemplazo de un factor por un cociente equivalente (Ejemplo: 48×50 como $48 \times 100 : 2$).
- Simbología asociada a multiplicaciones escritas.
- Prioridad de la multiplicación sobre la adición y la sustracción en la realización de cálculos combinados (Ejemplo: $16 - 4 \times 2 = 16 - 8$).
- Cálculo escrito de productos en que uno de los factores es un número de una o dos cifras o múltiplo de 10, 100, y 1000; utilizando inicialmente estrategias basadas en la descomposición aditiva de los factores y en la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la adición, que evolucionan hasta llegar a alguna versión del algoritmo convencional.
- Uso de la calculadora en base a consideraciones tales como cantidad de cálculos a realizar, tamaño de los números, complejidad de los cálculos.
- Técnicas de estimación y redondeo para controlar la validez de un cálculo y detectar eventuales errores.
- Comparación de variados ejemplos de multiplicaciones con resultado constante y formulación de afirmaciones que implican un reconocimiento de las propiedades en juego:
- Cambio de orden de los factores (conmutatividad).
- Secuencia en que se realizan las multiplicaciones (asociatividad).
- Productos en los que uno de los factores es una suma (distributividad).
- Comparación de variados ejemplos de multiplicaciones en los que intervienen el 0 y el 1 (Ejemplos: $24 \times 1 = 24$; $84 \times 0 = 0$) y formulación de afirmaciones respecto del comportamiento del 0 y el 1 en multiplicaciones.
- Comparación de variados ejemplos de multiplicaciones y divisiones que corresponden a situaciones inversas del tipo: repartir equitativamente entre 5 y luego volver a juntar lo repartido, y formulación de afirmaciones que implican un reconocimiento de la relación inversa entre la multiplicación y la división.

- Estudio comparativo de las cuatro operaciones estudiadas (Ejemplos: la adición y la multiplicación son conmutativas).

Contenidos mínimos obligatorios para quinto básico (Nivel Básico 3):

- Determinar resultados en situaciones correspondientes a otros significados (relación proporcional más compleja, cartesiano y combinaciones).
- Redondear números como estrategia para el cálculo oral, aproximado de productos.
- Utilizar algoritmos de cálculo escrito de productos con factores menores que 100 y con uno de los factores mayor que 100.
- Utilizar calculadora para determinar productos en la resolución de problemas.

Sobre la base de los objetivos fundamentales y los contenidos mínimos obligatorios fueron elaborados los Programas de Estudio en Chile, los cuales, proveen especificaciones por semestre para el Nivel Básico 2 y por Unidad temática para el nivel NB3.

En la nueva propuesta de ajuste curricular del Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC, 2008), las operaciones se han fundido en el eje “Números” (en el currículo vigente corresponde a otro eje denominado “Operaciones Aritméticas”). El nuevo eje “Números” relaciona números, operaciones y campos de aplicación de la matemática.

PARTE II

La enseñanza del concepto de multiplicación, las tablas de multiplicar y las propiedades de la tabla

Introducción

Esta segunda parte del libro trata de la introducción al concepto de multiplicación, el aprendizaje de las tablas de multiplicar y la identificación de las propiedades de la tabla. Si bien el tratamiento del concepto a partir de situaciones concretas es clave para entender el sentido de la multiplicación y potenciar el aprendizaje significativo, esta primera etapa no demanda mucho tiempo en comparación al tiempo que demanda el aprendizaje de las tablas. En las planificaciones, la enseñanza del sentido de la multiplicación demanda unas 3 a 4 horas de clases o sesiones de 45 minutos. El aprendizaje de las tablas demanda unas 30 horas pedagógicas (de 45 minutos), el estudio de las propiedades unas 5 horas más. Es decir, se destinan alrededor de 40 sesiones¹ para el tratamiento de este extenso tema. El estudio de las propiedades se realiza en parte después de estudiar las tablas del 2 al 5, y luego en mayor profundidad tras estudiar las tablas hasta el 9. La enseñanza de la multiplicación se inicia, en los textos de las tres colecciones de textos analizadas (Gakkoh Toshō, Tokyo Shōseki, PROMETAM²), con situaciones multiplicativas, en las que se considera tanto la situación como el invariante y la representación con símbolos matemáticos, esto es, la operación de multiplicación con el símbolo "x" (por). Los términos multiplicando y multiplicador son introducidos para generar la sentencia matemática ajustada a la situación dada.

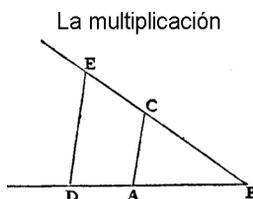
¹ El término sesión alude a una hora pedagógica de 45 minutos. El término lección se refiere al tema tratado en la sesión. Algunos autores planifican una lección por sesión, sin embargo ello no siempre es posible y planifican una lección para 2 ó 3 sesiones. Otros educadores entienden una lección como una subunidad de aprendizaje, contemplando para ella 10 a 20 sesiones de clases; así se usa en este libro.

² PROMETAM es el Proyecto de Mejoramiento de la Enseñanza Técnica en el Área de Matemática, en Honduras con asistencia técnica de JICA (Agencia de Cooperación Internacional del Japón). Los proyectos PROMESAM de República Dominicana, PROMECM de Nicaragua, GUATEMATICA de Guatemala y COMPRENDO de El Salvador auspiciados por JICA también fueron implementados en el período en que se elaboraron los marcos para el desarrollo de los textos

El concepto de multiplicación

Ya en el libro VII de Los Elementos, Euclides define $M \times N$ como M veces N , donde M y N son números que representan respectivamente M veces y N veces una unidad. Euclides asocia al producto una unidad plana (bidimensional). Euclides define una unidad como aquello en virtud de lo cual cada una de las cosas que hay, se llama una. Euclides sigue el marco de la Metafísica de Aristóteles, para quién el uno no tiene otra característica que la de ser medida de alguna multiplicidad, y el número, la de ser una multiplicidad de la medida. Es así con razón, que el *uno* no es considerado como un número porque la *unidad* de medida no es una pluralidad de medidas. En la metafísica de Aristóteles se llama multiplicidad aquello que es en potencia divisible en partes no continuas y magnitud aquello que es divisible en partes continuas.

En 1637 Descartes extiende el concepto de multiplicación a magnitudes homogéneas en el ámbito de la proporcionalidad, usando como unidad la medida de un trazo cualquiera. Descartes define el producto como la medida del trazo que es a la medida M de un trazo dado, como la medida N de otro trazo dado es a la unidad. En esta definición la unidad no es el 1 indivisible, sino una medida arbitraria dada, la que en la actualidad correspondería a cualquier real positivo.



El Ministerio de Educación de Japón define la multiplicación como “the number of unit when the unit is given”, digamos “el valor de la medida que equivale al valor de la unidad”, igual a la definición de Descartes. Si la medida y el valor de la unidad son números naturales, el producto es “la suma repetida de la cantidad que corresponde a la unidad”, pero cuando no lo es, la misma definición sirve para multiplicar decimales, fracciones y medidas cualesquiera.

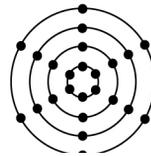
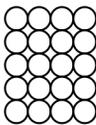
La definición de Descartes, adoptada en los programas oficiales de Japón ya en 1958, es la difundida por Freudenthal (1983) para la enseñanza de la multiplicación. Esta interpretación conlleva una doble ruptura con respecto a la definición euclidiana. Por un lado, la unidad deja de ser indivisible, y por otro el producto puede ser de la misma naturaleza que los factores, constituyéndose en una extensión de la definición aritmética tradicional.

- Problemas de tipo multiplicativo

Vergnaud (1990) estudia el campo conceptual de las estructuras multiplicativas y en él distingue tres tipos de problemas: los de isomorfismos de medida, los de producto de medidas y los problemas con un espacio único de medidas. Esta categorización brinda un marco para tratar las situaciones multiplicativas en la enseñanza. Un problema del primer tipo es “Una bolsa tiene 7 dulces, ¿cuántos dulces hay en 6 bolsas?” Una resolución “escalar” al problema es “Si hay 7 dulces por bolsa, en 6 bolsas habrá 42 dulces (7 dulces/ bolsa x 6 bolsas)”. Una resolución “funcional” es “Si hay 6 bolsas y en cada bolsa hay 7 dulces, entonces habrá 42 dulces (6 bolsas x 7 dulces/bolsa). En la resolución funcional se pasó de una medida (bolsas) a otra (unidades de dulces). Un problema del segundo tipo es “Tenemos 3 poleras distintas y 4 pantalones distintos, ¿cuántas combinaciones de polera y pantalón son posibles?” Esta situación incluye dos campos de medidas que se componen, sin constituir una función proporcional que asocie los dos campos. Un problema del tercer tipo es: “Andrés tiene el triple de lápices que José, ¿cuántos lápices tiene Andrés si José tiene 4?” Este tipo de problemas se puede homologar al primero.

- El modelo multiplicativo

Según Freudenthal (1983), la multiplicación sirve para hallar un número llamado producto que sea respecto del multiplicando lo que el multiplicador es respecto de la unidad, distinguiendo así claramente las situaciones multiplicativas de las aditivas.



El modelo aditivo es agregativo, incluyendo la repetición donde un número va al lado del otro como en las sumas sucesivas. Tareas como agregar y trasladar se vinculan con la adición y la sustracción. En el modelo aditivo todos son de una misma especie y no constituyen una combinación. El modelo multiplicativo es de interacción, un número en función de otro, “esto según esto otro”. La multiplicación modela situaciones de proporcionalidad, áreas y combinatoria, entre otras. Permite representar situaciones concretas y más abstractas como representaciones gráficas, arreglos bidimensionales de filas y

columnas, diagramas de árbol, círculos concéntricos y diagonales paralelas.

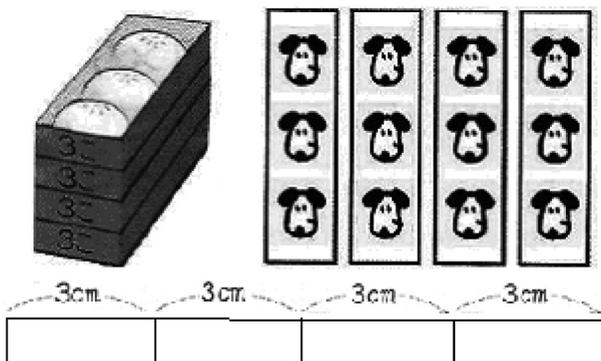
La comprensión de la frase “vendrán mis 3 tíos y mis 2 hijos” se ubica en el ámbito aditivo. La comprensión de la frase “vendrán dos hijos de cada uno de mis 3 tíos” se ubica en el ámbito multiplicativo, pues se refiere a algo de algo. La operación que determina el total de elementos dispuestos en grupos de igual cantidad es de carácter multiplicativa (Harel, G. y Confrey, J., 1994).

Enseñanza del concepto de multiplicación

Retomemos la definición mencionada en las Guías para la Enseñanza de la Matemática (1989, 1999) de Japón, que señalan que la multiplicación se usa para encontrar un total a partir de “cuántas unidades hay cuando una unidad es dada”. Para 2º grado, las Guías proponen el uso de grupos como unidad, de modo que la unidad pueda ser entendida como una medida arbitraria, en el sentido de Descartes. Este libro contiene un anexo que facilita una mejor comprensión del significado de la multiplicación en el marco del currículo japonés, significado que no se visualiza al restringirse este libro al tratamiento de la multiplicación en 2º y 3º grados con números naturales.

En la Guía para la Enseñanza de 1989, traducida al inglés (MEXT, M. Isoda, 2005), se deja ver que:

- Se comienza el estudio de la multiplicación como un medio económico para expresar una unidad repetida varias veces. La unidad puede ser el cardinal de un conjunto o una medida. Así, si un grupo de 3 elementos se repite 4 veces, se tiene $3+3+3+3$ elementos, lo que abreviadamente escribimos 3×4^3 .



³ En Japón, la ubicación oficial del multiplicando, la unidad, es a la izquierda. En esta parte del libro anotaremos “ \times ” en vez de “ \times ” para recalcarlo.

- Surge una definición de la multiplicación como la asignación de un nombre a un objeto de conocimiento. Esto es, la definición es creada como una forma de consolidar la comprensión del concepto.
- El significado es tratado en situaciones restringidas y paulatinamente es ampliado. Se comienza con situaciones concretas, con cantidades menores o igual a cinco y ámbitos discretos cercanos a las experiencias previas de los alumnos. Luego, se trabaja con unidades continuas, particularmente con el centímetro como unidad de medida.

Así, el foco en la iniciación a la multiplicación en 2° grado en Japón es de carácter conceptual, teniendo como punto de partida la procedurización de la adición. Se continúa en 2° grado con la enseñanza de las tablas de multiplicar, lo cual se combina con el estudio de las propiedades de la multiplicación, yendo de lo conceptual a lo procedural. La tercera parte de este libro muestra que la enseñanza de la multiplicación con multidígitos, en 3° grado en Japón, nuevamente va de lo conceptual a lo procedural. En este caso la multiplicación de números multidígitos se sostiene en el conocimiento conceptual y procedural de las tablas de la multiplicación. Los énfasis en la conceptualización y procedurización son focos articulados y omnipresentes como las caras de una misma moneda, en la enseñanza de la matemática escolar en Japón (Isoda, 1996).

- *Cómo iniciar el estudio de la multiplicación en la escuela*

La primera tarea consiste en desafiar a los alumnos con situaciones multiplicativas, de modo que lleguen a ser capaces de distinguirlas de las situaciones aditivas. Ésto, antes de enseñarles el símbolo "x" (por) y la expresión "multiplicado por". Las primeras situaciones multiplicativas estarán vinculadas a la idea de cierta unidad repetida un número conocido de veces. El aprendizaje es un proceso paulatino, de modo que la introducción a la "multiplicación" ha de ser gradual.

En Japón, el alumno inicia el estudio de la multiplicación mejorando la habilidad para formar "grupos" de igual cantidad y determinar un número total a partir del número de grupos. Esta es una actividad simple para un adulto, pero es un desafío para el niño de 2° grado. Los textos de segundo grado favorecen el desarrollo del concepto de multiplicación en el niño a partir de la idea de número de grupos, donde los grupos representan la unidad. Como

muestra la figura, si cada semáforo tiene 3 luces, entonces dos semáforos contienen 6 luces.

Teniendo el niño en mente la idea de grupo, es capaz imaginar la repetición de los grupos, entrando en juego el término “veces”. Al comienzo el alumno llegará al producto sumando de manera repetida, sin tomar conciencia del número de veces que sumó. Calculará usando conteos de dos en dos o más, duplicaciones y cálculos parciales entre otras estrategias, optimizando sus procedimientos de cálculo, sintiendo la necesidad de aprender la multiplicación como “el número de veces que se repite el agrupamiento o unidad”, e incluso, la conveniencia de aprender las tablas.



- La suma repetida como conocimiento previo y la unidad como conflicto cognitivo

Cuando los niños inician el estudio de la multiplicación piensan en ella de manera aditiva: en sumas repetidas y saltos iguales de dos en dos o más. Para que ellos entiendan la multiplicación de manera multiplicativa deberán reorganizar sus conocimientos, pensar en un grupo de grupos, y franquear el obstáculo de pensar sólo en el 1 como unidad. Para algunos niños es difícil pensar en el número de elementos de los grupos como la unidad, puesto que entra en contradicción con la idea de que el 1 es la unidad.

Atendiendo a estas dificultades, todos los libros de textos en Japón introducen la multiplicación partiendo con el agrupamiento, lo que significa desarrollar la unidad, no la adición repetida. Después de introducir la situación de agrupar para desarrollar en el estudiante la noción de unidad, los libros comienzan la adición repetida. La adición repetida es necesaria para desarrollar la tabla. Si se comienza con la unidad, como un plato, no es difícil para el estudiante contar el número de unidades, cantidad de platos. Debido a que algunos profesores comienzan con la adición repetida y piden a sus estudiantes que cuenten los números en abstracto, sin una imagen de la unidad, preguntándoles

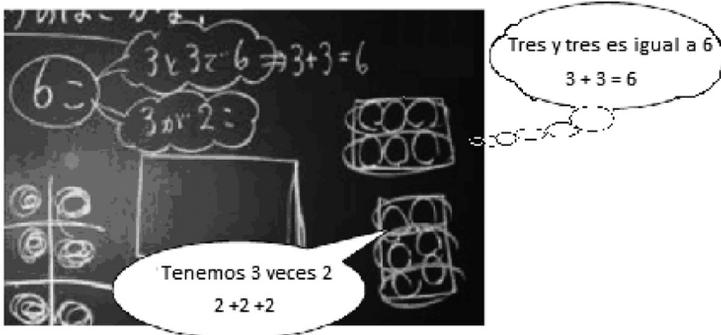
por ejemplo ¿cuántos 3 hay?, algunos niños sienten dificultad para contar. Si los estudiantes comienzan con la situación y el profesor les pide que cuenten el número de platos no tendrán dificultad si pueden contar.

Actualmente, educadores como Harel y Confrey (1994) recomiendan construir la multiplicación partiendo de la fragmentación, formación de grupos, y la suma repetida. Este proceso puede diferir según el país. En Japón, primero se identifican grupos de igual número de elementos y se les hace corresponder el cardinal de esos grupos a la unidad, para así identificar el número de “veces” que se repite esa unidad. En los países hispanohablantes y de lengua inglesa entre otros, el orden cambia y en un proceso de extensión de la multiplicación, en estos países se recomienda introducir la conmutatividad y luego la forma de leer el símbolo “x” como “por” o “multiplicado por”, cuestión que se analiza más adelante.

Cuando el niño siente que es fácil agrupar, nota la conveniencia de conocer productos y siente la necesidad de aprender las tablas con fluidez. El dominio alcanzado, como conocimiento previo, de la adición y del conteo de dos en dos y más, le facilitan la comprensión y el cálculo fluido de los productos, constituyéndose en las primeras herramientas para aprender las tablas de multiplicar.

- *Expresión matemática y procedimiento operatorio de la multiplicación*

¿En qué quedamos, 3×2 o 2×3 ? Como se hizo notar, en la tradición japonesa, de origen lingüístico, la expresión matemática 3×2 codifica el procedimiento operatorio “tres, dos veces”, es decir, “dos veces tres” ó “ $3+3$ ”.

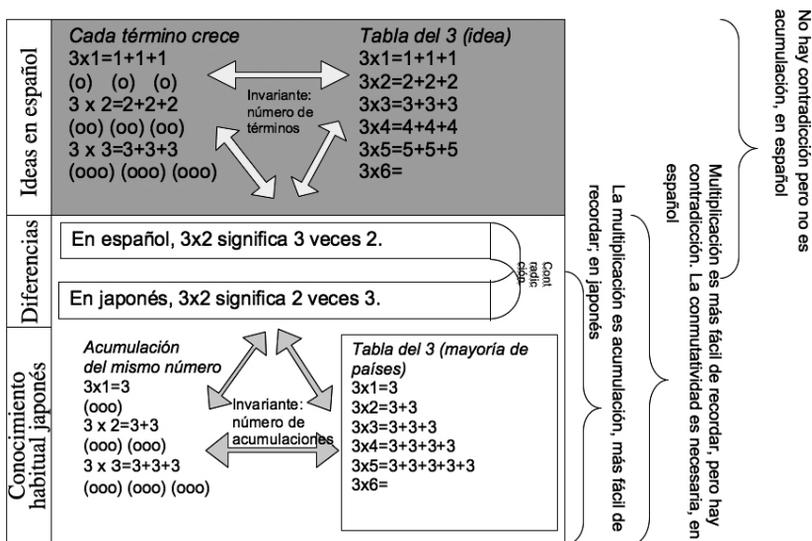


Esta interpretación es consistente con la forma de leer la tabla de multiplicar “tres por uno, tres; tres por dos, seis,...”, con la lectura de los términos multiplicando y multiplicador”, con la gramática japonesa por la que el término “veces” es sustituible por el vocablo “por”, con la extensión del significado cartesiano de la multiplicación a las fracciones, los decimales y los números negativos, y con la definición formal de multiplicación desarrollada por Dedekind y Peano.

En la Aritmética Teórica, el producto está dado por las definiciones inductivas de Dedekind y Peano (Olfos, 2002), que se sostienen en la regularidad “ $M \times_j (N+1) = M \times_j N + M$ ”. De modo que la multiplicación en Japón se extiende consistentemente incluso al formalismo matemático. La expresión $3 \times_j 2$ hace referencia a un grupo de tres, la unidad, y al número de grupos, el dos. Consecuentemente, $3 \times_j (2+1) = 3 \times_j 2 + 3$, pues se suma a los dos grupos iniciales un nuevo grupo.

En japonés, la tabla del 3 se lee “ $3 \times_j 1 = 3, 3 \times_j 2 = 3+3, 3 \times_j 3 = 3+3+3, \dots$ ”. En español, tres veces dos significa $2+2+2$. Si aplicamos esta notación a la tabla del 3, tenemos $3 \times 1 = 1+1+1, 3 \times 2 = 2+2+2, 3 \times 3 = 3+3+3$ (Mena, 2007). Una vez, dos veces y tres veces son expresiones utilizadas para contar tanto en español como en inglés. En japonés, una “vez”, dos “veces” sería un “bai” ó “kai”,

Contradicciones inevitables en la multiplicación originadas por el lenguaje



dos “bai” ó “kai”. Bai es “veces” y Kai indica “repetición”. Los japoneses usan “kai” para la adición repetitiva. En japonés “ 3×2 ” se lee “tres kakeru dos” y no se lee “tres bai (o kai) dos”, porque en japonés no se permite poner el número después de bai ó kai. Cuando se compara con el japonés, la representación de la multiplicación en español es complicada⁴.

La figura anterior, tomada de Isoda, Arcavi y Mena (2007), deja ver cómo la representación en el lenguaje natural, tanto en español como en inglés, es inconsistente con la forma matemática usada para representar las situaciones cotidianas de tipo multiplicativo.

Los programas actuales de muchos países -incluyendo Chile, Estados Unidos y Holanda-, codifican la expresión “3 veces 2”, $2+2+2$, como 3×2 , lo que se lee como “3 por 2” ó “3 multiplicado por 2”, esto es $3+3$, portando la inconsistencia señalada en la figura. Al ubicar el multiplicador a la izquierda, el símbolo “x” se lee “veces” y la tabla de multiplicar se lee “1 vez 3, 2 veces 3, 3 veces 3,...

” (1×3 , 2×3 , 3×3 ,...). Esta forma es consistente con el lenguaje algebraico, al que actualmente accede toda la población en

virtud de la masificación de la educación secundaria. En el álgebra elemental la expresión “ $2 \cdot b + 5 \cdot c$ ” tiene el escalar, multiplicador, a la izquierda. La suma de los términos semejantes $2n$ y $3n$ es $5n$. El perímetro de un cuadrado cuyo lado mide “a” se expresa por “ $4a$ ”. Las imágenes de abajo también tienen el multiplicador a la izquierda y están diseñadas para todo público, incluso para niños pequeños, pero no para Japón. En Japón se usa el formato en inglés para exportación, no para sus ciudadanos.



⁴ En Japón, solamente los maestros de escuela primaria reconocen la diferencia entre 3×2 y 2×3 , explicando el significado de la multiplicación en cada situación. En la educación secundaria los profesores no distinguen estas operaciones, porque las entienden de manera conmutativa.

Aunque en la actualidad los programas de varios países ubican el multiplicador a la izquierda, los profesores, padres y textos enseñan el algoritmo de la multiplicación ubicando el multiplicador a la derecha. El Programa de 4° Básico (Pág. 198) en Chile presenta como ejemplo de multiplicación con multidígitos la resolución al problema “123x8”, con el número menor, implícitamente el multiplicador, a la derecha. Para calcular 123×8 se multiplica el 3, el 20 y el 100 por 8. En el procedimiento de cálculo, el 8 toma el status de multiplicador como lo indica la expresión “multiplicado por”.

Para los adultos, incluso los profesores primarios y de matemática 3×2 significa indistintamente “3 veces 2” y “3 multiplicado por 2”, ya que el orden de los factores no altera el producto. Los actuales Programas de Chile evitan el uso de los términos multiplicando y multiplicador, privilegiando el uso del término factor que forma parte del lenguaje matemático formal y evita la confusión. En los textos de Japón se utilizan el multiplicador y el multiplicando básicamente para explicar el significado del término “veces”.

En resumen, hay dos formas de plantear la operación a partir de la situación “hay 3 manzanas en cada plato y hay 2 platos”. La primera con el multiplicador a la derecha: 3×2 (3 manzanas, dos veces) y la segunda a la izquierda: 2×3 (2 veces 3 manzanas).

La primera forma tiene las siguientes ventajas:

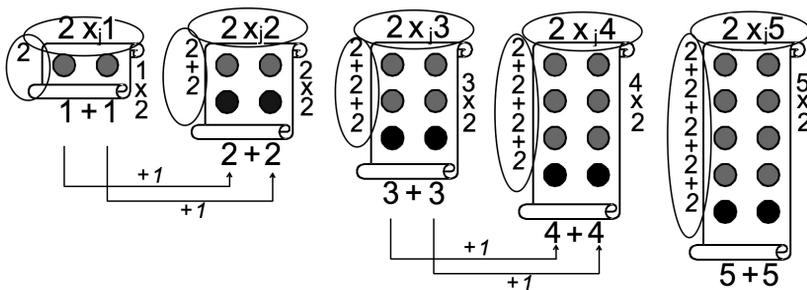
- Facilita la construcción de la tabla de multiplicar: si el multiplicador aumenta en 1, el producto aumenta en una vez la cantidad del multiplicando. Ejemplo: $2 \times 3 = 6$, 2×4 es 2 más que 2×3 , por lo tanto $2 \times 4 = 6 + 2 = 8$.
- Concuerda con el uso tradicional de los términos multiplicando, como primer factor, y multiplicador, como segundo factor.
- Presenta primero el multiplicando, la unidad, el tamaño de cada grupo, la cantidad de los elementos (manzanas) en cada grupo (plato), en la cual los niños ponen su atención para juzgar si se puede aplicar la multiplicación.

La segunda forma tiene las siguientes ventajas:

- Se ajusta gramaticalmente al uso del término “veces”.
- Se ajusta a la notación algebraica y a la descomposición polinomial del sistema de numeración decimal.

Para este libro hemos elegido la notación japonesa porque todos los ejem-

plos, incluyendo los videos, usan la notación japonesa. Esta es una razón técnica. Como lo describen Isoda, Arcavi y Mena (2007), hay tres opciones: Primera opción: Introducir la conmutatividad lo antes posible. Segunda opción: cambiar el formato de la tabla de multiplicar a 1×3 , 2×3 , 3×3 ,... Tercera opción: Cambiar desde la suma iterada a la fragmentación. La opción usualmente se toma a nivel nacional. Este libro no ofrece prescripciones, pues los autores no forman parte del gobierno. El libro esencialmente explica el enfoque japonés con la notación japonesa apoyado de fuentes -fotos, vídeos y escaneos- provienen del japonés. Los autores valoran y destacan la consistencia de la notación y la producción curricular del Japón, sin que por ello sugieran que esa misma forma de representación u otra debiera adoptarse en el plan de estudios de Chile. Lo más destacable del enfoque de enseñanza de Japón es que se desarrolla a través del Estudio de Clases sobre un "plan de estudios compartido". En Japón, muchos profesores e investigadores desarrollan nuevas ideas para enseñar más allá del plan de estudios nacional e intentan influir en el plan de estudios a través de artículos en revistas. Las buenas ideas son compartidas por los profesores en el intento por implementar un plan de estudios basado en ideas comprensibles. El "plan de estudios nacional compartido" es la plataforma para su mejora, más allá de las buenas prácticas de los profesores.



- Desde la conmutatividad al uso de la expresión "multiplicado por"

A causa de la lengua española inevitablemente surgen dos interpretaciones: 3×2 como $2+2+2$ y 3×2 como $3+3$. Como la multiplicación es conmutativa, esta ambivalencia no trasciende y frecuentemente es imperceptible por los adultos. Para superar la contradicción sugerimos usar con propiedad la expresión "veces" y enseñar tempranamente la conmutatividad de la multiplicación, cuestión que se explica en detalle en el anexo 2, facilitando la coherencia en la extensión de la aritmética al álgebra elemental.

- La iniciación a la multiplicación en la Guía de Japón

La Guía de Enseñanza de Japón (2006) ofrece especificaciones con respecto a la enseñanza de la multiplicación, tanto para segundo grado, como para tercero y otros niveles. Para segundo grado establece:

“Uno de los objetivos de este nivel es entender donde usar la multiplicación y, basado en ello, entender el significado de la multiplicación. También son objetivos del nivel componer las tablas de multiplicación basado en este entendimiento y poner atención a las características de la tabla de multiplicar en el proceso, hasta tener dominio de ella, y ser capaces de multiplicar con seguridad números de una cifra. La multiplicación se usa para encontrar cuantas unidades hay cuando se conoce una unidad* [*grupo referido a una cantidad o tamaño referido a una medida]. Esto es, la multiplicación se usa para simplificar la expresión de sumar el mismo número una y otra vez.”

- Iniciación a la multiplicación en los programas chilenos

Para el **primer semestre de tercero básico** el Programa de Estudio propone introducir el concepto de multiplicación con ejemplos de actividades como las siguientes (Act. 3, Pág. 184):

“En situaciones de carácter multiplicativo planteadas por el profesor [los alumnos] determinan, a través de sumas reiteradas, la cantidad total de elementos que conforman un todo si conocen la relación entre un elemento y el conjunto de elementos asociado a él (relación “uno a varios”). Para representar los objetos a los que se refiere el relato, pueden utilizar fichas u otros objetos manipulables.

- Se vende libros que contienen 10 figuras recortables cada uno. Si un niño compró 3 de esos libros, ¿cuántas figuras tendrá para recortar?
- El precio de una caja de chocolates es de aproximadamente \$2000. Si Carmen compró 2 cajas, una para ella y otra para regalar a su mejor amiga, ¿cuánto tuvo que pagar?
- Alicia y Pedro están haciendo guirnaldas para adornar su sala. En cada guirnalda usan 8 trozos de papel. ¿Cuánto papel necesitarán para hacer 5 guirnaldas?...”

“Posteriormente el profesor resume lo realizado, rotula la operación

como multiplicación y la expresa simbólicamente como (número de veces en que se repite el elemento unitario) (por) (el valor asociado al elemento unitario) (es igual) (al valor asociado a la nueva cantidad de elementos) lo que, en los casos descritos, corresponde a: $3 \times 10 = 30$; $2 \times 2000 = 4000$; $5 \times 8 = 40$; $6 \times 10 = 60$. Los alumnos y alumnas, en cada caso, escriben en su cuaderno la multiplicación correspondiente e identifican lo que representan los factores y el producto anotado en el contexto del problema.”

“En situaciones de carácter multiplicativo planteadas por el profesor, determinan la información que pueden obtener si se conoce la relación “uno a varios”. Encuentran la información aplicando sumas reiteradas, expresan simbólicamente la operación realizada y reconocen el significado de cada factor y del producto.

Para representar los objetos a los que se refiere el ejemplo, pueden utilizar fichas u otros objetos manipulables o representaciones gráficas. Ejemplos de problemas de este tipo:

- En una playa de estacionamiento hay cinco sectores en cada uno de los cuales se pueden estacionar 8 autos. ¿Qué información se obtiene efectuando la multiplicación 5×8 ?”

Reflexión: Se exponen a continuación cuatro comentarios con respecto a esta forma de introducir la multiplicación en los Programas de Estudio en Chile.

Primero: Los ejemplos elegidos se ajustan a la proposición de la Guía de Enseñanza de Japón, la que introduce la multiplicación en el contexto de situaciones en que se usa esta operación y sugiere que en base a ese uso el alumno entienda su significado. Conocer la cantidad de sus componentes o su tamaño. Es decir, ver “cuántas veces” y encontrar “cuántas veces el tamaño de la unidad”; aprendiendo con ello a representar cierto tipo de situaciones con la expresión de multiplicación, y en consecuencia a interpretar tal expresión.

Segundo: La sugerencia de que el profesor rotule la operación como multiplicación y la exprese simbólicamente también es consistente con el enfoque constructivista de la tradición japonesa. Sin embargo, cabe hacer notar que la secuencia de enseñanza de Japón verdaderamente es la introducción de un concepto nuevo y de un símbolo propio para él. En el caso de los Programas de Chile, esto no es tan claro, pues aparece en el contexto de conocimientos

anteriores. En efecto, en la primera unidad del primer semestre de tercero básico se propone el ejemplo “ 25×1000 es igual a 25000” para el indicador de aprendizaje. “Identifican el número que se forma a partir del producto de un número de una, dos o tres cifras por una potencia de 10”. Además, la palabra “múltiplo(s)” aparece más de 70 veces en el programa de segundo básico, usualmente haciendo referencia a múltiplos de 10 o de 100 en vez de los términos decena o centena. Como consecuencia de esto, queda claro que el ámbito numérico en el que se trabaja el concepto es más amplio que en el usado en Japón. Pero, por un lado aún no se conoce la multiplicación y por otro ya se conocen los múltiplos de 10, 100 y 1000. Además, el mismo Programa de Estudio sugiere (Pág. 192) que los ejemplos correspondientes a multiplicar por una potencia de 10 se trabajen coordinadamente tanto con las actividades de formación de números como con aquellas relacionadas con las actividades de composición y descomposición del eje números, cuestión que lleva a la confusión de los objetivos de las actividades y al desafío de su articulación. Lo cual se complejiza más aún, al establecerse en el Programa que el tratamiento de la multiplicación sea paralelo al de la división.

Tercero: Los ejemplos de actividad del Programa chileno vinculan con precisión las situaciones multiplicativas con el modelo matemático “ $ax=b$ ” y el significado de sus componentes factores, producto y multiplicación. Pero no hace reconocimiento del operador, o bien de la diferencia entre multiplicando y multiplicador, lo cual ofrece una interpretación más concreta de la situación.

Cuarto: El Programa actual de Chile vincula la multiplicación con la notación polinomial del sistema de numeración. Así, 2 decenas se asocia a 2 veces 10, 2×10 con el multiplicador a la izquierda. Esta notación es coincidente también con la ubicación del escalar a la izquierda en un espacio vectorial. Sin embargo, esta notación difiere de la notación usada en Japón y en este libro. Al escribir, por ejemplo 27×8 (veintisiete multiplicado por ocho) nos imaginamos que el multiplicador queda a la derecha y ello apareció así en los Programas chilenos (MINEDUC, 1960) anteriores a la matemática moderna en la que el producto se constituyó en un concepto abstracto aplicable a cálculos de áreas, combinatoria, proporcionalidad y no sólo a sumas iteradas. Reconocidos autores de texto de habla hispana (Mercado, 1990; Baldor, 1950; de Ulloa, 1706) han ubicado el multiplicador a la derecha, lo cual es cuestión de acuerdo, según se desprende del trabajo de Ibn al Banna (s. XIII).

Quinto: La actividad inicial acerca del significado de la multiplicación se ofrece prácticamente a la par de la introducción de la división, centrando la atención del alumno en la relación entre ambas operaciones, menoscabo la profundización del significado de la multiplicación en cuanto a las propiedades que la definen. En efecto, el Programa de Chile señala actividades de aprendizaje aisladas a modo de ejemplo, las que no constituyen una secuencia articulada. En el caso de la Guía de Enseñanza de Japón, se propone ahondar el significado de la multiplicación comprendiendo que el producto aumenta en la cantidad del multiplicando cuando el multiplicador aumenta en 1. Esta propiedad permite a los alumnos construir las tablas por sí mismos, recordar los productos en función de los ya memorizados y verificar si una multiplicación es correcta. Desde la perspectiva aritmética (teoría de números), cuestión que no viene al caso explicar a los alumnos, como ya fue señalado, se trata de entender la construcción inductiva de la multiplicación enunciada por Dedekind y Peano.

La iniciación a la multiplicación en un caso de Estudio de Clases

En esta sección se presenta un plan de clases, el relato de la implementación de la clase y la discusión de la misma, realizada en junio de 2008. La clase pública fue implementada por el profesor Natusaka. La implementación corresponde a la primera de tres clases referidas a la iniciación del concepto de multiplicación con alumnos de 2do grado.

- Descripción y plan de la clase a investigar

El tema de esta clase a estudiar es "Significado de la multiplicación", diseñada por el profesor Satoshi Natusaka (2008). El objetivo del estudio es considerar clases que permiten mejorar la capacidad de los alumnos para utilizar la multiplicación a través de vincular fenómenos con expresiones de multiplicación, aprovechando como los alumnos captan los mismos.

1. Nombre de la unidad: Multiplicación (1)

2. Con respecto al tema de estudio

- (1) Desde las actividades de “contar” y “descubrir” hacia las actividades de “expresar”

Cuando hay varios grupos con la misma cantidad de elementos, se expresa como “cantidad de bolas por número de grupos”, lo que corresponde a la expresión matemática de una multiplicación. Los alumnos expresan tal situación utilizando frases como “hay n bolas en cada grupo y se tiene m grupos”, aunque no conozcan la expresión matemática para la multiplicación. Por ejemplo, cuando están colocadas las bolas en una caja tal como nuestra la figura 1, habrá alumnos que expresan esa situación diciendo “hay cuatro columnas de tres bolas”. Se puede considerar que ésta es la expresión que identifica grupos de tres bolas verticalmente alineadas y muestra que existen cuatro columnas de tal cantidad de bolas. En realidad no existen líneas que separan o cercan grupos de tres bolas, pero los alumnos que utilizan la expresión arriba mencionada, están imaginando tales líneas.

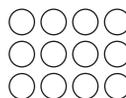


Figura 1

Asimismo, habrá otros alumnos que observan la misma situación con diferentes puntos de vista tales como “tres filas de cuatro bolas” y “dos grupos de seis bolas”. En cualquier caso, intentan calcular el número total de bolas, identificando grupos con la misma cantidad de elementos. Si se entiende que “hay cuatro columnas de tres bolas”, se puede encontrar el número total de bolas, haciendo el cálculo: “ $3 + 3 + 3 + 3 = 12$ ”. Es pertinente conducir a los alumnos a la expresión de multiplicación, obteniendo de ellos tal expresión y confirmando qué representa la expresión 3×4 .

- (2) Sobre la capacidad de aplicar

Al igual que en la figura 1, la cantidad de bolas de la figura 2 es 12. Se pregunta a los alumnos que pudieron darse cuenta que en la figura 1 “había cuatro grupos de tres bolas” si pueden ver también aquí cuatro grupos de tres bolas. Entonces, unos alumnos pensarán separando bolas como muestra (A). También habrá otros alumnos que piensen trasladando las dos bolas colocadas en la parte superior en las esquinas de la parte inferior como muestra (B). Y así cambiando la manera de colocar las bolas para que sea la misma que la figura 1.

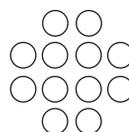
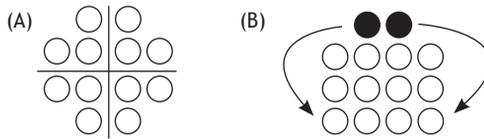


Figura 2



Se considera que observar la figura con detención y determinar la “cantidad de bolas por unidad o grupo” por sí mismos aumentará la capacidad de los alumnos para aplicar la expresión o modelo de multiplicación. Asimismo, escuchar como otros alumnos interpretan la figura y reconocen el modelo permitirá ampliar su punto de vista.

3. Objetivo de la unidad

- Entender el sentido de la multiplicación a través de escenarios concretos.
- Ser capaz de formular con la expresión de multiplicación escenarios que se puedan expresar mediante la misma.

4. Plan de orientación (4 horas)

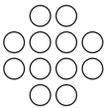
Primera fase: Sentido de la multiplicación2 horas
(Esta clase es la primera de 2 horas)

Segunda fase: Aplicación de la multiplicación.....2 horas

5. Orientación de esta clase

- 1) Objetivo: Aprender a expresar que “hay M grupos de N cantidad”, considerando grupos de la misma cantidad cuando se cuenta el número de elementos.

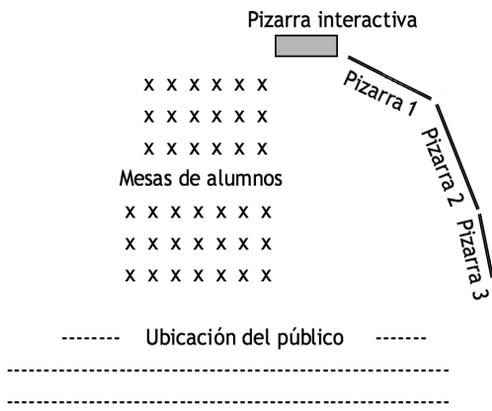
2) Desarrollo de la clase

Actividad de aprendizaje principal	Consideraciones
<p>Situación 1. Observar la caja y pensar "cuántas bolas entrarán en la misma"</p>  <ul style="list-style-type: none"> • 6 bolas sumando 2 bolas, 2 bolas y 2 bolas $2 + 2 + 2 = 6$ (bolas) • 6 bolas porque se ponen 2 bolas en 3 columnas. • 6 bolas porque se ponen 3 bolas en 2 filas. <p>Situación 2. Observar la forma de una caja donde pueden entrar 12 bolas y pensar "cuántas bolas entrarán en la misma"</p> <ul style="list-style-type: none"> - 6 de 2 bolas ($2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$) - 4 de 3 bolas ($3 + 3 + 3 + 3$) - 2 de 6 bolas ($6 + 6$) <p>Observar las bolas colocadas de la manera mostrada abajo desde el mismo punto de vista que el de la Situación 2</p> <ul style="list-style-type: none"> - $2+4+4=12$ - Se ven 4 grupos de 3 bolas - Se ven 6 grupos de 2 bolas - Si se trasladan 	<ul style="list-style-type: none"> - Pensar considerando el papel del dibujo rectangular como caja. - Es deseable que los alumnos noten que si se sabe el número de filas y de columnas, se entenderá el número total sin necesidad de poner todas las bolas en la caja. - Intentar obtener de los alumnos expresiones verbales como "hay tantos grupos de tantas bolas" ó expresiones mediante el modelo de adición. - Es deseable aprovechar el punto de vista de la situación 1. - Corresponder la expresión a las palabras. - Si se suman números desde la fila de más arriba hacia abajo, se puede expresar mediante la fórmula $2 + 4 + 4 + 2 = 12$. - Si hay alumnos que tratan de cambiar la manera de colocar las bolas trasladando algunas, también reconocerlo. 

- Relato de una clase pública en que se inicia el estudio de la multiplicación

A continuación se transcriben las notas tomadas durante una clase que el profesor Natusaka ofreció a 39 alumnos de 2º grado de la Escuela de Tsukuba en Tokio el 19 de junio del 2008. Estas notas fueron tomadas directamente en español a partir de una traducción simultánea ofrecida a profesores de Centroamérica.

La clase se realizó en el teatro de la Escuela Elemental Anexa de Tsukuba, en Tokio. El siguiente esquema muestra la disposición de los bancos entre el escenario y las primeras filas de butacas del teatro.



Alrededor de las 9:18 AM, ya preparado el escenario y con un público de más de 300 personas, la mayoría profesores de distintas regiones del país, entran los alumnos formados en dos filas. Los niños son recibidos con aplausos del

público. En la galería se aprecia a padres, apoderados e incluso hermanos. La clase a investigar, sin duda, es una ocasión importante para los mismos niños y no sólo para los profesores espectadores.

Una vez que el profesor Natusaka guía a los niños para que saluden al público y den el inicio ceremonial de la clase, plantea frente a la pizarra electrónica preguntas acerca de los tipos de triángulos y de polígonos representados en la pantalla. Los alumnos para responder, en varias ocasiones, se dirigen a la pizarra electrónica, y tocan la región de la pantalla como forma de responder a la pregunta planteada ¿Cuál de las figuras es un triángulo? ¿Cuál de los triángulos es equilátero?... Cuando el alumno responde tocando una región correcta de la pantalla, la figura se rellena o pinta de color verde. Si la respuesta es errada se colorea de rojo. Así, la actividad permite a los alumnos reconocer 3 triángulos, 2 cuadriláteros, 1 pentágono y un hexágono entre las figuras dispuestas en la pantalla. Luego el profesor avanza a nuevas preguntas con el software interactivo, cambia el contenido de la pantalla y aparecen 4 triángulos y 6 rectángulos. En este momento todos los alumnos levantan la mano, se aprecia que ya han ganado confianza y se han involucrado en la dinámica con el profesor.

A las 9:36 el profesor presenta en la pizarra interactiva un rectángulo y bajo él un pastel circular, dando inicio sin que los alumnos lo noten a una clase en torno al concepto de multiplicación.

Nótese que el profesor usa la pizarra interactiva y no un papel o la pizarra para presentar la situación problema, como fue señalado en el plan de la clase.



Prof.: ¿Cuántos dulces caben en la caja? Hagan conjeturas sobre cuántos dulces de color rosado cabrían en la caja celeste.

Al.: Sale a la pizarra y muestra lo que entiende.

El profesor a propósito, tarda en reaccionar, da tiempo para que los alumnos piensen.

9:37 Prof.: ¿Cuántas unidades de dulces rosados caben?

9:38 Prof.: Abran el cuaderno y anoten. ¿Cuántos dulces caben? - Agrega- A los que no se les ocurra, miren la pantalla.

Prof.: Voy a ir revisando sus predicciones -recorre la sala entre los bancos y observa rápidamente los cuadernos de los alumnos-. Entonces voy a escribir aquí -mientras muestra un sector de la pizarra 2- algunas de las respuestas de ustedes. 4..., 5..., 6..., por lo que veo, algunos de ustedes han escrito 4, otros 5 y otros 6. Un alumno escribió 8 y otro 12 ¿Cuáles de estas respuestas les parecen posibles? ¿Cuáles serían las respuestas imposibles?

Al.1.: 4 no puede ser, cabrían 2 más. Al.2. Si miramos, cabrían 6.

9:40 Al.2.: ¿Se permite superponer los pasteles?

Al.3.: Una corrida de 6 y otra de 6. No creo que quepan sólo 6. Si quieren que sea una caja de 6 abajo y 6 arriba, tiene que ser más alta la caja.

Prof.: ¿Cuál es la razón de esa conjetura?

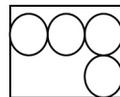
Al.4.: Yo pienso que caben 12, 6 arriba y 6 abajo.⁵

Al.5.: Observando desde arriba, entonces puede haber 12, 3 corridas de 4.

9:45 Prof.: Excluiremos ese caso. La caja tiene que tener todos los pasteles a la vista.

Al.: -Va a la pizarra y muestra con sus dedos cómo las medidas del diámetro de los círculos está contenida tres veces en el largo del rectángulo. 3 en la fila de arriba y 3 en la de abajo, entonces caben seis.

(El software permite al profesor poner en pantalla otra caja más abajo). Con el mouse y las herramientas del software, coloca en la caja 4 pasteles, como lo muestra la figura.

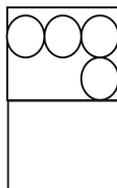


⁵ Nota de los autores: En los pasillos de los supermercados de Japón por lo general hay a la vista cajas con 6, 10 ó 24 dulces o pasteles, ya que es tradición que las personas se otorguen pequeños regalos. La sociedad japonesa es homogénea, todas las ciudades cuentan con supermercados y el poder adquisitivo permite a la mayoría de los ciudadanos acceder a este tipo de productos.

Prof.: Es lo mismo que hacían con cartulina. Tenemos que probar...
- Tras dibujar dice- Entonces caben 6.

Prof.: Hay espacio suficiente. Si hay 3 en la primera fila, entonces...
caben 3 en la superior.

Al.1. (Utilizando la opción copiar del software el alumno dibuja en la pizarra electrónica otro rectángulo y comenta): Como caben 6 la primera vez, si se tiene suficiente altura cabra otra vez 6.



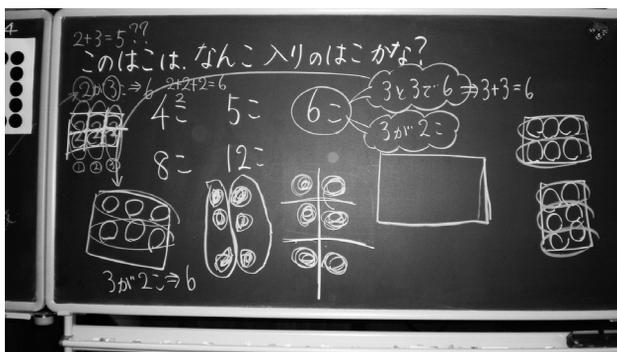
9:50 Al.2.: -en voz alta desde su puesto- Están sobrepuestos.

Prof.: ¿Caben 6? Levanten la mano los que dicen que caben 6 -varios alumnos levantan la mano-.

Al.4.: Caben 3 en una fila. $3+3$ es 6.

Prof.: -escribe la expresión $3+3=6$ en la pizarra mientras dice- tres más tres es igual a seis.

Al.: -Presionando botones del software, visibles en la pantalla interactiva, un alumno dibuja y dice- Entonces sí hay 6. Hay un grupo de 3 y hay otro de 3.

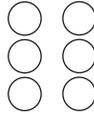


Prof.: ¿Cómo dividiste?

Al.: El otro día hicimos un dibujo como este -señalando los óvalos dibujados en la pizarra-. Hoy día cambiamos la forma, pero se refiere a lo mismo. Luego, cambiamos la forma, pero es igual.

Al.2.: Si pensamos en dos grupos de 3, se tiene 6.

9:59 Prof.: Primero escuche lo que dijo su compañero -repite la idea del alumno-. Ayer alguien separó así y dijo dos grupos de 3. ¿Puedo decir también, "hay tres grupos de dos"?



El profesor ya no dibuja con el software en la pizarra electrónica. Dibuja en la pizarra 2 con tiza de color, al lado izquierdo, arriba.



Prof.: Entonces,... son tres grupos de dos. Entonces en una fila de 2, hay 3 grupos. Entonces 3 grupos de 2, hay tres grupos de 2. ¿Ustedes lo ven así?

Al.: Si tomamos 3, dos veces, entonces va a ser 6.

Prof.: $3+3=6$. Entonces, en este caso ¿cómo se puede expresar $2+2+2$? Si lo expresamos a través de la suma, ¿cómo lo podemos expresar? (Sólo la mitad del curso levanta la mano y un alumno hace una pregunta al profesor).

Al.: Es 2, está así como agrupada, entonces ¿se trata de grupos?

Prof.: Su compañero preguntó ¿qué representa este número 2? -hace una pausa y espera que los alumnos levanten la mano-.

Prof.: -Dirigiéndose al alumno anterior- ¿Puede repetir lo que dijo antes?

Al.: -Vuelve a la pizarra y explica-. Un grupo de 2 repetido 3 veces.

Prof.: -Dirigiendo la pregunta a un alumno para evaluar su comprensión y focalizar la discusión-. ¿Puede repetir lo que dijo su compañero?

Al.: ... -No responde, el profesor lo hace-.

Prof.: Entonces 2 representa el número que divide. Hay 3 grupos de 2. El número que divide $2 \times 3 = 6$. El 2 es el número que divide. El 3 indica cuántas veces.

Al.: Puedo decirlo de forma más sencilla: "2 es el número que va a ser multiplicado".

Prof.: Pudo decirlo de forma más entendible.

Al.: Este número, el 2,... de 2 veces 3... lleva a 6. 3 muestra cuántos hay.

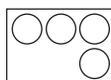
10:03 Prof.: -dibujando en azul en la pizarra 2 pasteles dentro de un círculo. Entonces 3 indica "cuántos círculos". Una forma es dos grupos de 3, y otra es 3 grupos de 2; es decir, se puede decir de diferentes formas.



Prof.: Ahora -volviendo a la pantalla interactiva- en esta caja, ¿cuántos entran?



Al.: ¿Puede volver a mostrar la caja anterior?

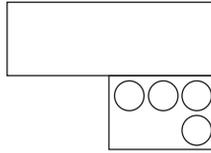


Al.: ¿Puede mostrar las dos cajas?

El profesor usa el mouse para copiar la caja y así muestra ambas.

Al.: ¿Puede mover la caja una bajo la otra?

10.06 Prof.: Sí, se puede mover.



Prof.: -Dado que un alumno le da argumentaciones, el profesor le solicita que vaya a la pizarra interactiva- Venga.

Al.: En esa -la caja de abajo-, entran 6 -Usa el software para trasladar y alinear las cajas-.

Prof.: Parece que marcó allí. ¿Sabe qué es lo que está haciendo?

Al.: Está tapando.

Prof.: Ajustó, marcó, movió. Piensen, ¿cuál es la intención de Lu?

El profesor les da 30 segundos para que conversen en grupos de a 3 alumnos.

Al.: ¿Son los rectángulos de abajo del mismo ancho?

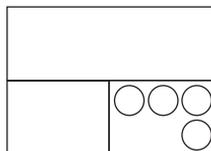
Prof.: (el profesor muestra que es el mismo ancho ubicando un rectángulo al lado del otro): ...Entonces, ¿cuántos dulces caben en esta caja grande?

Al.: -Responden todos los alumnos juntos- 12.

Prof.:¿Quiénes son los que piensan que no es 12?

Al.: No sé bien, pero debe ser par.

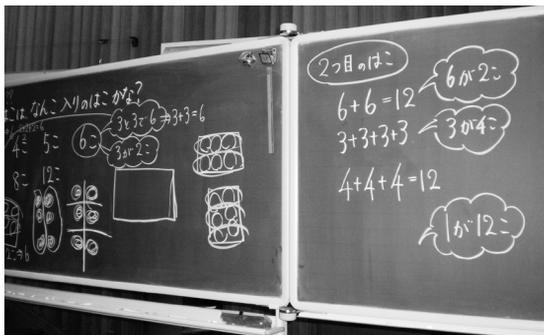
10:12 Al.: -Frente a la pizarra interactiva, mueve el rectángulo de abajo y dice-. Cabe dos veces, entonces entran 12.



Al.2.: En la caja pequeña caben 6. Yo marco allí y el espacio es equivalente a la caja. Entonces la caja grande es equivalente a dos cajas pequeñas. Entonces, se obtiene el total sumando 6, 2 veces.

10:15 Prof.: Ustedes dicen que 2 veces seis es 12. -El profesor escribe en la tercera pizarra-

$$6 + 6 \rightarrow 12$$



Prof.: Entonces 2 de 6, cuatro de 3, 2 grupos de 6. ¿Hay otra forma de expresar el total?

Al.: $4+4+4$

Prof.: 4 y 4 son 8 y 8 con 4 son 12.

Al.: Podemos tener otra forma de dividir, 3 por 4. $4+4+4$ es una forma nueva.

Prof.: ¿Hay otras formas? -el profesor decide dar por terminada la clase- ...Yo había planeado que ustedes probaran con calcomanías... Llegó la hora, así que vamos a dejar ello para la próxima clase, el día lunes. Ahora vamos a saludar a los profesores que nos visitan. Miren a los profesores visitantes. Yo voy a ir en un rato más con ustedes, luego los alcanzo.

Un alumno pregunta si al día siguiente tendrán otra actividad especial.

Prof.: No, ...tienen clases como siempre. Mañana hay clases de música. No olviden el lápiz, libro de texto y lleven el uniforme de educación física.

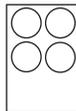
10:19. Los niños salen.

- *Análisis de la clase del profesor Natsusaka*

Una vez que los alumnos salen del teatro, en fila, el profesor se dirige al público con el objeto de dar una justificación de su actuación conforme al objetivo propuesto para la clase.

Prof.: Muchas gracias, me gusta recibir opiniones. Acabamos de presenciar una clase de 2º grado de introducción a la multiplicación, en la que los niños hicieron conjeturas acerca de cuántos pasteles cabían en una caja. Mi intención fue que los niños presentaran al menos las unidades por columna. Más de la mitad conocía la palabra multiplicación, aunque no sé si la comprendían. Pero mi intención era que los niños conocieran el significado de la multiplicación, así que aunque yo escuchaba mucho la palabra "multiplicación", o expresiones como "2 por 3", yo no las repetía, porque yo quería que comprendieran. Así que a propósito no introduje la expresión "multiplicación". Traté de que usaran términos conocidos por todos ellos.

10:31 Prof.: En la clase el primer niño dijo $4+2$ es 6, expresando el total en forma de suma. El segundo niño dijo, escribiendo verticalmente un grupo de 3 y otro de 3, es 6.



Esa parte de introducción, tardó 10 minutos. Salieron dos expresiones: 2 grupos de 3 y 3 veces 2. Quizás los niños no se dieron cuenta de ello. Entonces yo quería que entendieran. Un niño dijo $2+3$, pero no se puede usar suma, entonces la multiplicación apareció como algo importante, necesario.

Expresar verbalmente: "En 2 grupos hay 3" indica que hay otra manera de ver. Entonces yo cambié del color azul al rojo, porque representaban cosas diferentes. Yo quería que conocieran una nueva operación aritmética. Entonces, aquí... -señalando un esquema hecho durante la clase- aquí hay 12 unidades. Entonces un niño explicó pensando en formas de 4 objetos, 3 grupos de 4, o separando de diferentes formas. Así mi intención fue que tuvieran la posibilidad de descubrir agrupaciones. ¿Cuántos grupos puede haber?; quería que agruparan de diferentes formas antes de que usen el término "multiplicación".

Pregunta un profesor visitante de Centroamérica: ¿Por qué no se usó material concreto?

Prof.: -Respondiendo-. Como ya había mostrado esto a los niños con otras formas, decidí no aplicar fichas o material concreto. Además, en primer grado ya lo hicimos. Eso se usa en Japón, pero esta vez no usaron fichas. La verdad es que estuve pensando usar una hoja en blanco y calcomanías de distintos colores para que pegaran en las cajas.

Prof.: En cuarto grado vemos las áreas y las dimensiones.

Profesor del público: Yo estoy usando este programa y veo la utilidad del programa, pero porque no usaban la conjetura real en tres dimensiones y ver la altura ya que tal vez se puede mostrar de diferentes formas, comparando para los niños sería más entendible con algo más real.

Resp.: Esta vez mostré verticalmente 2. Horizontalmente 3. ¿Qué sugiere usted?

Profesor del público: Un niño mostró verticalmente 2 por 3. Pero usando una caja real sería más eficiente. Sería posible tener varias cajas y ajustar las respuestas de los alumnos.

Resp.: Yo antes de la clase practiqué con el software, quizás se puede tener más dibujos. En cuanto a lo real, no lo pensé. Ya que en una caja caben 12, porque pueden ser 6 ó 12. No pensé que pensarían hasta allí (tres dimensiones).

Profesor del público: Vengo de una Isla... Usted logró el objetivo, pero me he perdido. Usted siempre preguntaba ¿por qué piensa así? Escriba la razón. Así el tipo de conductas era visible y desarrollaba razonamiento e imaginación. Pero ¿por qué los niños sabían contestar?

Resp.: Sigo los lineamientos del nuevo programa que da más énfasis a la expresión verbal "capacidad de expresar", "capacidad comprensiva", planteamiento "textual". Importa preguntar por la "razón" o "por qué se puede escribir así". Los profesores suelen suponer lo que expresa el niño. Es importante dejar al niño decir por qué y los niños entenderán hasta dónde han entendido. Y ahí está el límite de la comprensión, y es importante saber hasta dónde. Así uno sabe que están entendiendo en forma segura. Los niños fallan en expresar verbalmente, pues lo hacen con esquemas. Los niños quieren transmitir sus ideas. Hay casos difíciles de expresar verbalmente y hay niños que han dibujado y han logrado expresar sus ideas. Yo entendí que un niño no podía decir lo que entendía, por lo que le pedí que expresara

de otra forma o con más palabras. Es decir, que parafraseara. También es importante fomentar la capacidad de escuchar, que sepan interpretar lo que les quieren decir. Tengo que tener la intención de escuchar bien, para poder comunicarme. Si yo digo de manera ambigua o poco clara las ideas, entonces necesitamos más tiempo y situaciones para comunicarnos. Si los alumnos están entendiendo, entonces salen preguntas de ellos. Les pedí que expresaran de otra forma (dibujando...). Cuando los niños intentan, hay que evaluar que están entendiendo. Al principio jugamos con estas figuras -mientras señala los triángulos y rectángulos que aparecen en la pizarra interactiva-. Hay una poligonal abierta. Pregunté: ¿Por qué no es figura o no se puede considerar como figura?... Hago pensar a los niños el ¿porqué?

Prof.: Volviendo al tema, interesa desarrollar la capacidad de interpretar. Observo las caras de los alumnos para captar si me escuchan. Al ver las caras veo si entienden. Como dice mi colega, el profesor Tanaka, "veo al fondo de la sala, y voy hasta la mitad de la sala para saber si me están escuchando y entendiendo". Es importante ver las caras de los niños.

Profesor asistente: Ya que usted habla del significado de la multiplicación y que en 4° grado verá área (dimensiones). En cuanto al área, ¿cómo introduciría el área? Porque ahora usted está dibujando pasteles (círculos)...

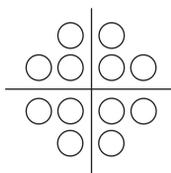
Resp.: Pregunta difícil. Hoy por ejemplo usé pasteles del mismo color, quizás una fila puede ser de 1 color, la de abajo de otro color. Pero mi intención era que mirando el mismo dibujo vieran distintas formas. Usamos demasiados colores. Quizás los colores sirven al área. Un conejo, 2 orejas, 3 conejos, 6 orejas. Pero mi intención era que en esta clase, los niños sepan agrupar de distintas formas. En el caso de los conejos es obvio que tienen 2 orejas.

11.05 ¿Cuántos círculos hay?

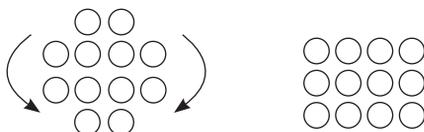


Pensé en expresiones como $4 + 4 + 4$, pero hay niños que pensaron en "3 de las esquinas, cuatro veces". Es importante desarrollar la capacidad de descubrir

diferentes agrupaciones. Después de aprender el significado de la multiplicación, también se puede aplicar a este dibujo.

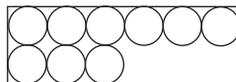


Traslado dos círculos para dar forma a la figura. No es que sepan, sino que antes de entrar en la tabla de multiplicar aprendan a agrupar de diferentes formas.



Pregunta profesor visitante: Vengo de una provincia lejana. Usted insiste en la capacidad de agrupar de diferentes maneras. Pero cuando hablaba a un niño le decía que esa caja grande -señalando el rectángulo dibujado en la pizarra interactiva- era equivalente a dos pequeñas, el niño decía que no era lo mismo. Quizás dijo que 2 cajas de 6 no es lo mismo que 1 caja de 12.

Resp.: Quizás un niño dijo (ver esquema de la derecha) 3 cajas rectangulares en la caja grande. Había niños que miraban la caja grande como 2 pequeñas.



Pero hay niños que lo veían como 3 cajas de 3 círculos cada una. Después los niños, en la próxima clase pueden continuar con las representaciones. Son pocos los que pensaron que se tenía 3 cajas cuadradas...

Pregunta profesor visitante: Su clase me dio ideas para mi clase. Yo a veces, comparando mi clase, intervengo demasiado. Pero, ¿qué trató de hacer usted? Además, la pizarra no se usó tan bien.

Resp.: Yo pedí que plantearan verbalmente,... los niños no lo hicieron. Yo traté que los niños tuvieran un planteamiento antes de salir a la pizarra, pues hay niños que se olvidan al tratar de enunciar el planteamiento de forma verbal. Yo escribo despacio para que los niños alcancen juntos. Yo también intervengo, cuando algo es importante. Cuando planteo 4 problemas, no hay espacio en la pizarra para el 4º problema. Depende de los niños, algunos tra-

tan de economizar cuaderno. La utilización de la pizarra y cuaderno tienen bastante que ver.

Hay profesores que insisten en anotar los objetivos de la clase. No estoy de acuerdo porque los objetivos no son estáticos. Pueden aparecer objetivos de los niños, objetivos escondidos o tal vez aparentes. Creo que es un error. Por otro lado, anotar los objetivos lleva a que entiendan mejor los niños más débiles. Según la naturaleza de los objetivos será conveniente o no anotarlos. Pues algunos se exploran o se descubren. Si escribo los objetivos y yo quiero que descubran regularidades, entonces ya se acaba la clase. Pues si escribo, ya saben que hay regularidad y no hay exploración. Hay temas en que no se puede escribir los objetivos de la clase. Dentro del desarrollo de la clase se va entendiendo. Quizás a mitad de la clase se puede anotar la intención, desde la perspectiva de los niños.

11.20 Pregunta profesor asistente:

Estuvimos observando la primera clase para entender la multiplicación. Pero ¿cómo sería la próxima clase?

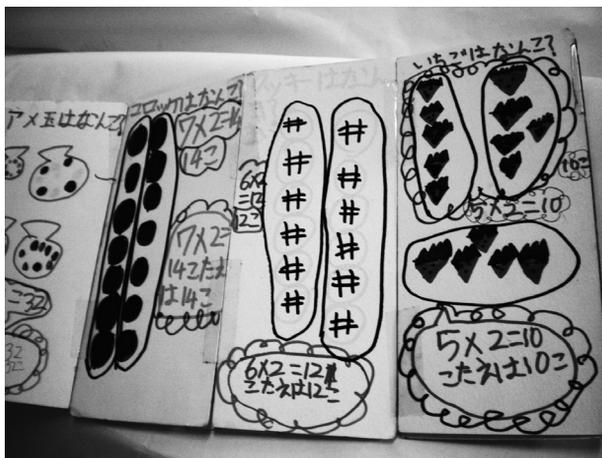
Resp.: Sigue el tema de expresar la multiplicación por ejemplo 2×3 es 6, y la siguiente mostraría directamente una multiplicación y no mostraría $3+3+3$ sino la expresión.

Pregunta profesor asistente: Un niño dijo 1 unidad 12 veces ¿cómo trata a ese niño?

Resp.: Yo usaría la idea para $1 \times \dots$, en la tabla solamente aparece 2×9 , pero quizás se puede expresar 12 grupos de 1 ó 1 unidad 12 veces. A pesar de que a esta altura se expresa hasta 1×9 . Pero se puede.

Pregunta profesor asistente: Para que los niños usen la multiplicación, ¿usted cree importante ver diferentes formas o agrupaciones?

Resp.: Los niños agrupan de diferentes formas, como se los dije. En las próximas clases usaremos la multiplicación y los niños aprenderán la tabla de multiplicar. Para que se familiaricen con la tabla yo uso como método la práctica con la libreta de registro de avance de la tabla de multiplicar -muestra cuadernillos hechos por los alumnos, que les sirven de manual para memorizar las tablas-. El alumno va aprendiendo cada tabla y pide que se la controlen... Entonces el profesor o un miembro de la familia (padres) firma una vez que controla el aprendizaje de la tabla. Así avanza el alumno con la tabla del 2,



la tabla del 3, etc. En las clases que vienen yo hago escribir el planteamiento en forma textual... Luego, trato que los niños hagan ejercicios... Enseguida vemos algunas propiedades. Pregunto si se suman estas dos filas -refiriéndose al 2 y el 3 en las multiplicaciones 3×2 y 3×3 -, ¿es lo mismo que 3×5 ? ¿Cuánto es? Si hay 6 y 9,... hay 15... Así los niños de segundo grado descubren que el resultado de la fila de 5 es la suma del número de arriba y de abajo. Ahora voy tapando -refiriéndose a las filas de la tabla de multiplicar- y les pido que digan la suma. Lo que estoy usando es la ley distributiva. Y así, forman, buscan y descubren la regularidad en la tabla de multiplicar. Puedo tapar de a 4 números. De la tabla se pueden aprender muchas cosas, por lo que es bueno que la sepan manejar bien.

11:27. Profesor Isoda: -Se presenta como profesor investigador de la Universidad de Tsukuba y comenta-. Los niños aprenden ¿Cuántas más...? Pero otra cosa es "¿Cuántas veces?", porque ahora los niños no saben multiplicar, pero a través de la agrupación, posiblemente les surjan expresiones de multiplicación. La multiplicación, como operación aritmética, es importante para que los alumnos aprendan a expresar relaciones distintas al sentido que tiene la adición. En la multiplicación el primer número representa una cosa totalmente distinta a lo que representa el segundo número. Eso último no se remarcó en la clase.

Prof.: -Agradece la intervención y cierra la etapa de comentarios y discusión- Gracias por su presencia.

Mientras el público sale del teatro, se queda un grupo de profesores de Centroamérica en el salón planteando un par de preguntas al profesor Isoda.

Profesor observador de Centroamérica: ¿Cómo hizo el profesor la evaluación de la clase? Los alumnos tenían la tendencia a contar y la intención del profesor era que los alumnos agruparan.

Respuesta profesor Isoda: Hay que separar evaluación de calificación. Como confirmación el profesor evalúa dentro de la clase, observando si levantan la mano y si están entendiendo.

Pregunta profesor observador: ¿Todos tienen el PC? ¿Cuál fue la importancia del uso de pizarra interactiva?

Respuesta del Profesor Isoda: En esta clase sólo se usó el programa con software interactivo. Hay una tendencia al uso. Hoy no se vio la ventaja del software. Ahora se está experimentando, es interactivo. Hay una tendencia al uso de la pizarra interactiva, al uso de la informática, aunque no para hacer algo novedoso, sino como herramienta para enseñar.



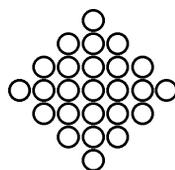
Ejemplo de clase de investigación. Aplicación del concepto de multiplicación

El siguiente plan de clase usa el concepto de multiplicación y fue elaborado por el profesor Kozo Tsubota (2007a), vicerrector de la escuela elemental anexa a la Universidad de Tsukuba. Con el tema de investigación se propone “Representar Ideas usando Expresiones e Interpretar las Expresiones” en la resolución de problemas usando la multiplicación.

1. Tema: Encontrar unidades usando la multiplicación

2. Acerca del tema de investigación

En esta clase, los estudiantes encuentran el número de puntos en una configuración (arreglo) de puntos como la que se muestra en la figura de la derecha, y encuentran las maneras de contar el número de puntos en el arreglo.



Algunos estudiantes representan sus maneras de contar usando expresiones y otros interpretan el significado de cada expresión.

A través de estas actividades, los estudiantes pueden encontrar interpretaciones no esperadas, para sus propias expresiones, y pueden emerger otras maneras de contar. Deseamos usar estas experiencias para favorecer la valoración por parte del alumno el aprender unos de otros en el estudio de las matemáticas.

En particular, para cada expresión presentada por un estudiante con respecto a la figura de arriba, otro estudiante interpreta qué quiso decir el primero con la expresión. Esta actividad provee una extensión de las formas de pensar de los estudiantes acerca de las expresiones.

3. Objetivo

Entender cómo resolver problemas usando multiplicaciones.

4. Duración de la lección: Clase especial de una hora

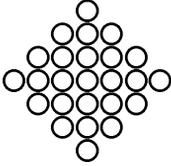
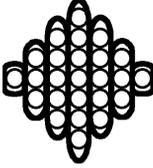
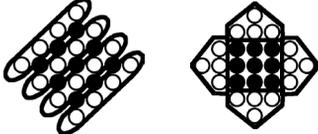
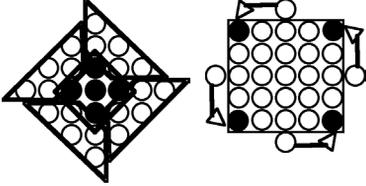
5. Desarrollo de la clase

(1) Objetivo de esta clase:

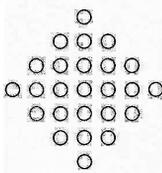
Encontrar maneras de contar el número total de puntos en un cuadrado con cuatro puntos en cada lado, y representar cada manera de contar como una

expresión. Interpretar el significado de las expresiones.

(2) Desarrollo

Contenidos	Consideraciones
<p>1. Mirando la figura siguiente, piensa "¿Cuántos puntos hay en ella?"</p>  <p>2. Confirma que hay 25 puntos, y piensa en cómo representar la manera de contarlos usando una expresión.</p> <p>3. Los estudiantes representan sus maneras de contar las expresiones, y otros interpretan sus expresiones.</p> <p>(1) $1 + 3 + 5 + 7 + 5 + 3 + 1 = 25$ (2) $(3 \times 3) + (4 \times 4) = 25$ (3) $5 \times 5 = 25$ (4) $6 \times 4 + 1 = 25$ (5) $3 \times 8 + 1 = 25$ (6) etcétera.</p> <p>4. Confirme que hay varias maneras de contar.</p>	<p>(1) Muestre la figura a los estudiantes sólo por un momento, de modo que ellos construyan una imagen del arreglo de puntos de la figura.</p> <p>(2) Cada estudiante debe tratar de representar mediante una expresión su propia manera de contar.</p> <p>(3) Los estudiantes ven las expresiones hechas por otros estudiantes, y piensan en las interpretaciones de esas expresiones.</p> <p>3 - (1)</p>  <p>3 - (2)</p>  <p>3 - (3)</p>  <p>Confirman que hay varias maneras de contar, y que para cada expresión hay varias interpretaciones posibles.</p>

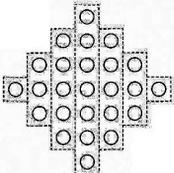
En el texto escolar "I<tem 2" de editorial Shogaku (2008) se desarrolla esta actividad, incluyendo las posibles respuestas de los alumnos como las propone el profesor Tsubota en una clase sujeta a estudio (estudio de clases).



¿Cuántos puntos hay en la figura?




Encuentren formas de contar.

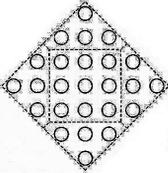


Yo cuento por columnas

Juan José

$$1 + 3 + 5 + \square + 3 + 1$$

$$= \square$$



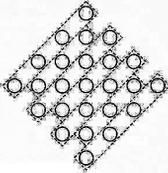
En el centro cuento 3 por 3 y luego agrego 4 veces 4 en las esquinas.

Trinidad

$$4 \times 4 = 16$$

$$3 \times \square = \square$$

$$16 + \square = \square$$



Yo veo las diagonales, cuatro de 4 círculos y tres de 3 círculos.

Sol Jesús

$$4 \times \square = \square$$

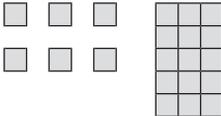
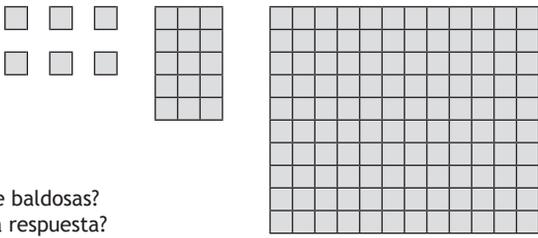
$$3 \times \square = \square$$

$$\square + \square = \square$$


Desarrollo de la habilidad de agrupamiento a través del estudio de la multiplicación en el caso de Japón

Las orientaciones curriculares de 1989 potenciaron la variación de los tipos de agrupamiento, esto es, la variación de la unidad empleada, para no limitarla a la base diez de la notación decimal. Estas orientaciones se reflejan en 2º grado con la iniciación al estudio de la multiplicación. En Japón, los maestros utilizan libros de texto aprobados por el Ministerio de Educación y en consecuencia siguen las orientaciones del currículo.

Isoda y Odajima (1992) investigaron acerca del desarrollo del concepto de número en el niño desde el punto de vista de las estrategias de agrupamiento. Ellos estudiaron cómo varía la capacidad de los alumnos para agrupar según el nivel de enseñanza, comparando las estrategias de agrupamiento ofrecidas por alumnos de 1º, 2º y 3º grado.

Preguntas:	
1. Para 1º Básico	
Para 2º y 3º Básico	
(1) ¿Cuál es el total de dinero? (2) ¿Cómo obtuviste la respuesta?	
2. Para 1º Básico	
Para 2º y 3º Básico	
(1) ¿Cuál es el total de baldosas? (2) ¿Cómo obtuviste la respuesta?	

Preguntas del estudio sobre monedas:

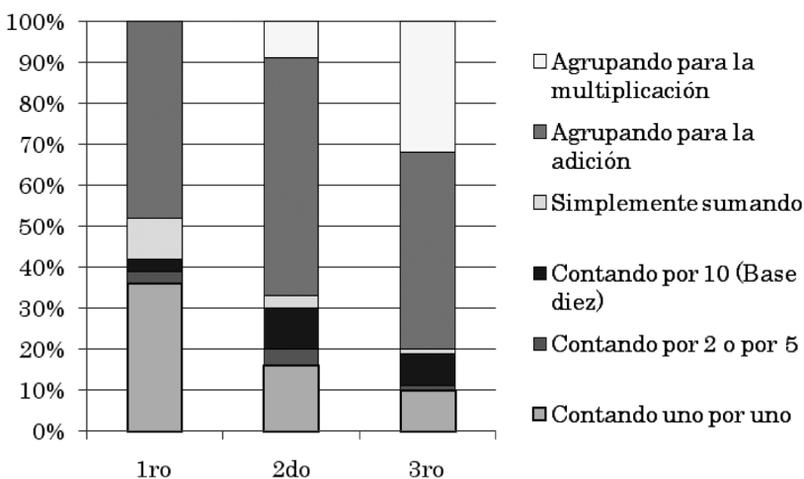
(1) ¿Cuánto dinero hay en total? (2) ¿Cómo obtuvieron la solución?

	197 alumnos de 1er grado		214 alumnos de 2do grado		167 alumnos de 3er grado	
	Monedas	Baldosas	Monedas	Baldosas	Monedas	Baldosas
Conteo uno por uno	36	47	36	23	10	12
Conteo de n en n	3	8,6	4	4	1	1
Conteo por decena	3	5,4	10	22	8	8
Simplemente suma	10	2	3	4	1	0
Agrupando para sumar	48	37	58	31	48	43
Agrupando para multiplicaciones	0	0	9	16	32	36

Los resultados expresados en porcentajes (%) son los siguientes:

En el caso del 1° grado, algunos alumnos están contando o agrupando para la adición. En el caso del 2° grado, antes de estudiar la multiplicación, se utilizan monedas para agrupar en la adición. Después de que los alumnos han estudiado la multiplicación, en el caso del 3° grado, algunos están aplicando la idea de grupo para la adición o la multiplicación.

Este resultado muestra que un gran número de alumnos del 1° grado está contando; un gran número de alumnos de 2° grado, que aun no ha estudiado la multiplicación, sigue desarrollando un agrupamiento apropiado para la adición, y un gran número de alumnos del 3° grado seleccionó los grupos apropiados para sumar o multiplicar. El aprendizaje de la multiplicación desarrolla la idea de agrupamiento, no sólo en base diez. La base diez no es la única unidad a considerar. En el enfoque japonés, los alumnos aprenden a seleccionar entre varias unidades para realizar cálculos.



Plan de la subunidad Iniciación al Concepto de Multiplicación

Las páginas siguientes ejemplifican una planificación para la realización de la subunidad "Iniciación al concepto de multiplicación" elaborada a partir de la revisión de los textos de Editorial Gakkoh Tosho y del proyecto PROMETAM.

Se usa el término subunidad, porque el tema de la iniciación al concepto de multiplicación es parte de la Unidad "Multiplicación 1" referida a la multiplicación entre números de una cifra. La Unidad "Multiplicación 2" se refiere a multiplicación de números con más de una cifra. Los temas de la unidad "Multiplicación 1" son el concepto de multiplicación, las tablas de multiplicar y las propiedades de la tabla. Los temas de la unidad "Multiplicación 2" son tratados más adelante en la Parte III de este libro.

El formato de la planificación tiene un encabezado en el que se incluye el objetivo de la sesión y la pregunta central de la clase. La columna de la izquierda contiene (1) la Situación problema que presenta el profesor a los alumnos, (2) las preguntas claves que formula el profesor para llevar la clase hacia el objetivo, (3) diversas estrategias que pueden emerger de los alumnos para dar respuestas al problema, y (4) muestra de anotaciones en la pizarra. En la columna de la derecha se ofrecen sugerencias al profesor, y notas que ayudan a entender la clase.

La subunidad "la iniciación al concepto de multiplicación" comprende las sesiones:

Sesión 1: Una nueva forma de calcular.

Sesión 2: La multiplicación en nuevos contextos.

Sesión 3: Usemos el modelo de multiplicación.

A continuación se presentan en detalle estas tres sesiones:

UNIDAD MULTIPLICACIÓN I:**SUBUNIDAD 1. LA INICIACIÓN AL CONCEPTO DE MULTIPLICACIÓN****(3 SESIONES)****SESIÓN 1: UNA NUEVA FORMA DE CALCULAR****PÁGINA 1 DE 3**

Objetivo de la Sesión: Que el alumno elabore una forma para calcular el total de objetos que conforman un número dado de grupos de igual número de objetos.

Pregunta Central: ¿Podemos pensar una forma de calcular el total de objetos agrupados en conjuntos de igual número de objetos?

Situación Problema: Encontrar una forma para calcular el número total de cada tipo de fruta presentado en platillos de igual cantidad de elementos en la lámina.

Lámina en pizarra:

Prof.: ¿Qué observan en la lámina?... Vamos a encontrar la cantidad total de cada fruta. Primero ¿cuántos plátanos hay en total?

Alumno: ...

Prof.: Dibujen en su cuaderno los platos con guindas. ¿Cuántas guindas hay en total?

Alumno: ...

Prof.: ¿Cómo lo hicieron?, ¿de qué forma calcularon?

Alumno: ...

Prof.: ¿Cuántas guindas hay en cada plato?, ¿en cuántos platos?, ¿cuántas guindas hay en total?

Alumno: ...

Prof. (confirmando la relación entre las cantidades verbaliza y escribe en la pizarra): "3 guindas en cada plato" y "4 platos" da "12 guindas en total".

El profesor presenta la situación una vez que los alumnos distinguen los tipos de frutas que se presentan en grupos o platos de igual cantidad. El modelo en juego es una forma de cálculo más "eficiente" que la suma de sumandos iguales. La apropiación del modelo es la adquisición del significado de la multiplicación.

El profesor intenta que aparezca la idea de que hay grupos de platos con igual número de fruta, a diferencia del caso de los plátanos.

El profesor observa los alumnos que suman, los que cuentan usando los dedos u otra técnica.

El profesor logra que los alumnos escuchen las ideas de sus compañeros y deja para el último la explicación de la adición iterada.

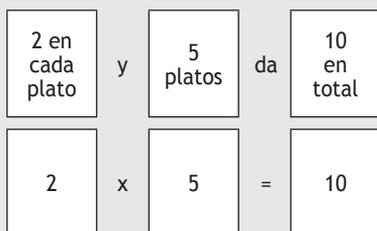
El profesor induce a la aparición del modelo multiplicativo, sin explicitar conectivos o claves como "veces".

Lo ideal es que el alumno vea la relación entre los dos datos iniciales y el tercero.

UNIDAD MULTIPLICACIÓN I: SUBUNIDAD 1. LA INICIACIÓN AL CONCEPTO DE MULTIPLICACIÓN SESIÓN 1: UNA NUEVA FORMA DE CALCULAR		(3 SESIONES) PÁGINA 2 DE 3
<p>Pizarra</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center; border: 1px solid black; padding: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">3 en cada plato</div> y <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">4 platos</div> da <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">12 en total</div> </div> <p>Prof. (Volviendo a la lámina): Veamos ¿Qué frutas ves en grupos de igual cantidad?</p> <p>Alumnos: Manzanas y cocos.</p> <p>Prof.: ¿Cuántos cocos hay en total? (Los alumnos responden).</p> <p>Prof.: “6 cocos en cada bolsa” y “_ bolsas” da “_ cocos en total”. Ahora, debemos completar.</p>	<p>El profesor da tiempo para que los alumnos usen sus estrategias para encontrar la expresión. Luego, observa el trabajo de los alumnos en sus cuadernos, e insiste en el esquema anterior.</p> <p>Si ningún alumno logra el modelo, el profesor verbaliza y escribe en la pizarra parte del modelo.</p>	
<p>Pizarra</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center; border: 1px solid black; padding: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">6 en cada bolsa</div> y <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> _ bolsas</div> da <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> _ en total</div> </div> <p>Alumnos completan en sus cuadernos y un alumno lo hace en la pizarra.</p> <p>Prof.: ¿Cuántas manzanas hay en total?, ¿Cómo expresamos la forma usada para determinar el número de manzanas?</p> <p>Alumnos: ...</p> <p>Prof.: “_ platos” y “_ manzanas en cada plato” da “_ manzanas en total”. Y les pide que completen.</p>	<p>El profesor insistiendo en el esquema anterior, pregunta por el número de manzanas.</p> <p>Si ningún alumno presenta el modelo, el profesor verbaliza y completa en la pizarra parte del modelo.</p>	
<p>Pizarra</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center; border: 1px solid black; padding: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">2 en cada plato</div> y <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> _ platos</div> da <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> _ en total</div> </div> <p>Profesor o alumno (en la pizarra): “2 manzanas en cada plato y 5 platos da 10 manzanas en total”.</p> <p>Prof.: Esta situación se puede escribir “$2 \times 5 = 10$” y se lee “2 por 5 es 10” ó “2 multiplicado por 5, es igual a 10”.</p>	<p>El profesor pide a los alumnos que escriban en sus cuadernos y que un alumno complete en la pizarra.</p> <p>El profesor escribe una manera matemática para representar las situaciones en juego.</p>	

UNIDAD MULTIPLICACIÓN I:**SUBUNIDAD 1. LA INICIACIÓN AL CONCEPTO DE MULTIPLICACIÓN****(3 SESIONES)****SESIÓN 1: UNA NUEVA FORMA DE CALCULAR****PÁGINA 3 DE 3**

Pizarra



Prof.: Esta forma de cálculo se llama MULTIPLICACIÓN.

Prof.: ¿Cómo expresamos con esta forma el cálculo y el total de guindas? ¿Y de cocos?

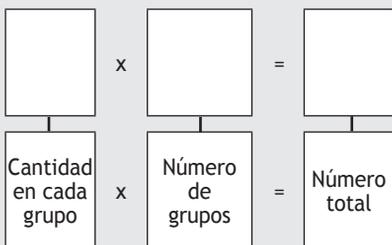
Alumnos escriben en sus cuadernos y un alumno lo hace en la pizarra.

Prof.: ¿Qué significa el signo "x"? ¿Cuál es el significado de esta forma de cálculo llamada multiplicación?

Los alumnos expresan sus ideas.

Prof. (concluyendo): "La multiplicación es la forma para calcular, usada para obtener un total cuando se tiene la misma cantidad de objetos por grupo, y se conoce el número de grupos"

Pizarra



Prof.: ¿Es posible escribir la cantidad total de plátanos usando la multiplicación? ¿Por qué?

Alumnos responden.

Prof. (Cerrando la sesión): Bien, en conclusión, usamos la multiplicación para calcular el total de objetos a partir de grupos con igual número de objetos que se reiteran.

Luego de introducir el modelo matemático para representar esta forma de cálculo "multiplicativa", el profesor solicita a los alumnos que la utilicen para los casos anteriores.

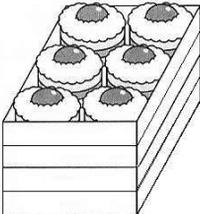
El profesor pide a los alumnos que verbalicen el significado de la multiplicación como una nueva forma de representar un cálculo.

La multiplicación se convertirá en una nueva forma de operar, una vez que los alumnos aprendan las tablas.

Los alumnos debieran confirmar que no se puede por no tener la misma cantidad cada plato.

Si un alumno propone pasar un plátano de un plato a otro, para que todos los platos tengan la misma cantidad, puede explicar su argumento en la pizarra.

<p>UNIDAD MULTIPLICACIÓN I: SUBUNIDAD 1. LA INICIACIÓN AL CONCEPTO DE MULTIPLICACIÓN (3 SESIONES) SESIÓN 2: LA MULTIPLICACIÓN EN NUEVOS CONTEXTOS PÁGINA 1 DE 4</p> <p>Objetivo de la Sesión: Que el alumno identifique situaciones en que puede usar la multiplicación.</p> <p>Pregunta Central: ¿En qué situaciones podemos usar la multiplicación?</p> <p>Hasta el momento, el alumno puede representar situaciones usando el modelo de la multiplicación, pero como no sabe las tablas, podrá representar, pero no podrá resolver problemas directamente mediante la multiplicación y recurrirá a técnicas como las sumas iteradas.</p>	
<p>Prof.: ¿Ustedes saben cuánto es 5 dedos más 5 dedos sin necesidad de contar?</p> <p>Algunos alumnos dirán que sí, 10.</p> <p>Prof.: Muy bien, entonces ustedes también pueden decirme cuántos dedos tengo en dos manos sin necesidad de contar.</p> <p>Posiblemente algunos alumnos respondan nuevamente 10.</p> <p>Prof.: ¿Puedes explicar por qué es 10?</p> <p>Situación Problema: ¿Cómo podemos usar la multiplicación para calcular el número total de cada tipo de objetos de la lámina?</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Lámina: 2 ruedas por bicicleta, en 5 bicicletas. 4 sillas por mesa, habiendo 3 mesas. 6 pasteles en cada caja, apiladas 4 cajas. 3 pelotas de tenis en cada uno de los 5 tarros. cintas de 2 centímetros, un total de 3 cintas, cintas de 2 centímetros cada una, 6 cintas.</p> </div> <p>Prof.: Observa la lámina. ¿Qué operación puedes usar para determinar el número total de ruedas de bicicleta?</p> <p>Alumnos responden.</p> <p>Prof.: ¿Por qué se puede usar la multiplicación?</p> <p>Alumno: Porque todas las bicicletas tienen la misma cantidad de ruedas, dos...</p> <p>Prof.: Mirando la lámina, ¿en qué otra situación podemos usar la multiplicación?</p> <p>Se espera que los alumnos se refieran al número de sillas por mesa.</p>	<p>Antes de proponer la situación problema para la Sesión, el profesor procura que los alumnos tomen atención y relacionen el contenido con el de la sesión (clase) anterior.</p> <p>El profesor procura que distintos alumnos participen.</p> <p>La lámina alude a 2 situaciones cotidianas, a dos situaciones semi ocultas -para las que se espera que aparezcan bloques u otras formas de representación-, y dos situaciones de medición.</p> <p>Se espera que algún alumno proponga la adición y otro la multiplicación. Si no, el profesor pregunta por otra forma de calcular, pidiendo que recuerden lo aprendido en la clase pasada.</p> <p>Los alumnos tienen que sentir la facilidad de escribir con la multiplicación en vez de la suma iterada. Por eso conviene usar múltiplos de 2, de 3 ó de 5.</p>

UNIDAD MULTIPLICACIÓN I:	
SUBUNIDAD 1. LA INICIACIÓN AL CONCEPTO DE MULTIPLICACIÓN	(3 SESIONES)
SESIÓN 2: LA MULTIPLICACIÓN EN NUEVOS CONTEXTOS	PÁGINA 2 DE 4
<p>Prof.: ¿Cómo podemos expresar el número de sillas usando la multiplicación? ¿Con qué expresión matemática podemos expresar el número de sillas?</p> <p>Alumnos trabajan en sus puestos.</p> <p>Prof.: Comparen su respuesta con la de su compañero. Pueden levantarse y conversar con otro compañero también. Luego pide a un alumno que escriba la respuesta en la pizarra y que la explique.</p> <p>Prof.: ¿Cuántas veces hay cuatro sillas?</p> <p>Los alumnos podrían responder: Tres veces.</p> <p>Profesor: Quién puede explicar frente a la lámina.</p> <p>Alumno (indicando en la lámina): "Una vez, dos veces y tres veces... "</p> <p>Profesor (mostrando el esquema de las cajas apiladas): ¿Cuántos pasteles piensan ustedes que hay en cada caja?</p> <p>Alumnos podrían decir 6, por tratarse de cajas iguales (el profesor corrobora esa interpretación de la situación).</p>  <p>Profesor: Ahora, determinen el número total de pasteles (mientras observa el trabajo de los alumnos en los bancos, puede recomendar que usen dibujos, bloques o porotos para las representaciones).</p> <p>Profesor (una vez que ya han terminado algunos alumnos): Quienes terminan pueden comparar con sus compañeros.</p> <p>Prof. (dando el tiempo suficiente para el trabajo personal): ¿Quién puede explicar cómo determinó el número total de pasteles? (El profesor elige a dos alumnos para que desarrollen sus estrategias en la pizarra. Uno de ellos habrá usado bloques u otra forma de representación).</p>	<p>El profesor intenta que los alumnos lleguen a la expresión o frase matemática $3 \times 4 = 12$, y expliquen el significado de cada número y la relación entre ellos.</p> <p>El profesor centra la clase en la consolidación de la estructura "$A \times B = C$" y en su alcance a nuevos contextos.</p> <p>En este momento o más adelante si lo ve conveniente, el profesor relaciona la multiplicación con la palabra "veces".</p> <p>Se espera que los alumnos sientan la necesidad de una representación auxiliar, como bloques o esquemas de cajas una al lado de otra, debido a que sólo es posible ver los pasteles de la caja superior de la pila.</p> <p>Mientras los alumnos resuelven en sus bancos, el profesor aprecia las distintas estrategias usadas por los alumnos y planea qué alumnos explicarán en la pizarra.</p>

UNIDAD MULTIPLICACIÓN I: SUBUNIDAD 1. LA INICIACIÓN AL CONCEPTO DE MULTIPLICACIÓN SESIÓN 2: LA MULTIPLICACIÓN EN NUEVOS CONTEXTOS		(3 SESIONES) PÁGINA 3 DE 4										
<p>Prof.: Explique cómo calculó, puede apoyarse en el esquema o dibujo usado.</p> <p>Alumno explica apoyándose en la representación usada en su cuaderno.</p> <p>Prof.: ¿Cuántos pasteles dibujó en cada caja? ¿Cuántas veces dibujó la caja de pasteles? o ¿Cuántas cajas dibujó? ¿Cuántos pasteles hay en total? ¿Cuál es la expresión matemática que representa el total de pasteles, usando la multiplicación?</p> <p>Profesor: ¿Cuántas pelotas de tenis hay en cada tarro?</p> <p>Alumnos responden.</p> <p>Prof.: ¿Cuántas pelotas hay en total?, pueden ayudarse con esquemas propios. ¿Cómo se expresa el número total de pelotas usando la multiplicación? (El profesor observa el trabajo de los alumnos en sus cuadernos y observa si algún alumno representa las pelotas por bloques o dividiendo los tarros en 3 partes).</p> <p>Prof.: ¿Quién puede explicar?</p> <p>Alumno explica.</p> <p>Prof. (Según corresponda): ¿Qué significa cada bloque? ¿Cada columna de bloques? ¿Cuál es el total de bloques? ¿Qué significa cada número?, ¿qué relación hay entre los números?, ¿cuál es el total de pelotas?, ¿cuál es la expresión matemática?</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin-top: 10px;"> <p style="text-align: center;">Pizarra</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px;"> <tr><td style="width: 100%; height: 100%;"></td></tr> <tr><td style="width: 100%; height: 100%;"></td></tr> <tr><td style="width: 100%; height: 100%;"></td></tr> </table> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px;"> <tr><td style="width: 100%; height: 100%;"></td></tr> <tr><td style="width: 100%; height: 100%;"></td></tr> <tr><td style="width: 100%; height: 100%;"></td></tr> </table> </div> <div style="font-size: 2em;">x</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px;"> <tr><td style="width: 100%; height: 100%;"></td></tr> <tr><td style="width: 100%; height: 100%;"></td></tr> <tr><td style="width: 100%; height: 100%;"></td></tr> </table> </div> <div style="font-size: 2em;">=</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px;"> <tr><td style="width: 100%; height: 100%;"></td></tr> <tr><td style="width: 100%; height: 100%;"></td></tr> <tr><td style="width: 100%; height: 100%;"></td></tr> </table> </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center; width: 150px;"> Número de pelotas por tarro </div> <div style="font-size: 1.5em;">x</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center; width: 100px;"> Número de tarros </div> <div style="font-size: 1.5em;">=</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center; width: 150px;"> Número total de pelotas </div> </div> </div>												

UNIDAD MULTIPLICACIÓN I:																											
SUBUNIDAD 1. LA INICIACIÓN AL CONCEPTO DE MULTIPLICACIÓN	(3 SESIONES)																										
SESIÓN 2: LA MULTIPLICACIÓN EN NUEVOS CONTEXTOS	PÁGINA 4 DE 4																										
<p>Prof. (Señalando en la lámina): Determinen el largo total de la cinta. Ustedes pueden usar el dato "el trozo de 2 cm cabe 3 veces en la cinta". Pueden ayudarse usando esquemas o dibujos.</p> <p>Prof. (Tras supervisar el trabajo de los alumnos en sus cuadernos e identificar distintas producciones): ¿Quién explica al curso cómo calculó el largo de la cinta?</p> <p>Alumno explica en la pizarra y dibuja.</p> <p>Prof.: Cuando dices "cada trozo es de 2 cm y tienes tres trozos de cinta, da una cinta de 6 cm", ello significa "2 cm, 3 veces es 6 cm".</p> <p>Prof.: Uno de los números es el "multiplicando" y el otro es el "multiplicador". En este caso el multiplicador es 3 que multiplica al multiplicando que es 2. El resultado del cálculo se llama "producto".</p> <div data-bbox="162 777 714 1159" style="border: 1px solid black; padding: 10px;"> <p>Pizarra</p> <table style="width: 100%; text-align: center; border-collapse: collapse;"> <tr> <td colspan="3" style="border: none;"> <table style="margin: 0 auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">2 cm</td> <td style="border: none; padding: 0 10px;">+</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">2 cm</td> <td style="border: none; padding: 0 10px;">+</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">2 cm</td> </tr> </table> </td> <td colspan="3" style="border: none;"> <table style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">Largo de cada trozo de cinta</td> <td style="border: none; padding: 0 10px;">x</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">Número de trozos de cinta</td> <td style="border: none; padding: 0 10px;">=</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">Largo total de la cinta</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">2</td> <td style="border: none; padding: 0 10px;">x</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">3</td> <td style="border: none; padding: 0 10px;">=</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">6</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">Multiplicando</td> <td style="border: none; padding: 0 10px;">x</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">Multiplicador</td> <td style="border: none; padding: 0 10px;">=</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">Producto</td> </tr> </table> </td> </tr> </table> </div> <p>Prof.: Dibujen en su cuaderno la cinta que se obtiene a partir de trozos de cinta de 2 cm, 3 trozos. Determinen el largo total de la cinta.</p> <p>Prof. (Tras dar suficiente tiempo): ¿Quién explica cómo calculó? (Según el tiempo disponible, permite a distintos alumnos mostrar sus estrategias y representaciones). Alumno explica ó desarrolla en la pizarra.</p> <p>Prof. (Cierra la clase): Hoy aprendimos a usar la multiplicación en nuevas situaciones y aprendimos tres nuevas palabras...</p>	<table style="margin: 0 auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">2 cm</td> <td style="border: none; padding: 0 10px;">+</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">2 cm</td> <td style="border: none; padding: 0 10px;">+</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">2 cm</td> </tr> </table>			2 cm	+	2 cm	+	2 cm	<table style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">Largo de cada trozo de cinta</td> <td style="border: none; padding: 0 10px;">x</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">Número de trozos de cinta</td> <td style="border: none; padding: 0 10px;">=</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">Largo total de la cinta</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">2</td> <td style="border: none; padding: 0 10px;">x</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">3</td> <td style="border: none; padding: 0 10px;">=</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">6</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">Multiplicando</td> <td style="border: none; padding: 0 10px;">x</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">Multiplicador</td> <td style="border: none; padding: 0 10px;">=</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">Producto</td> </tr> </table>			Largo de cada trozo de cinta	x	Número de trozos de cinta	=	Largo total de la cinta	2	x	3	=	6	Multiplicando	x	Multiplicador	=	Producto	<p>El profesor da tiempo y observa qué hacen los alumnos. Además permite que ellos interactúen.</p> <p>Se espera que el alumno explique la estrategia personal usada en su cuaderno.</p> <p>El profesor conecta la explicación del alumno con el término "veces" y las ideas de los alumnos.</p> <p>El profesor da tiempo para que escriban las nuevas palabras y las representaciones en sus cuadernos.</p> <p>La subunidad debe permitir al alumno entender el sentido de la estructura multiplicativa, de modo que la sienta útil, y que sienta necesidad de aprender las tablas, para resolver con rapidez.</p> <p>El profesor pone atención al trabajo de los alumnos y en actitud evaluativa se pregunta ¿están entendiendo?</p>
<table style="margin: 0 auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">2 cm</td> <td style="border: none; padding: 0 10px;">+</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">2 cm</td> <td style="border: none; padding: 0 10px;">+</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">2 cm</td> </tr> </table>			2 cm	+	2 cm	+	2 cm	<table style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">Largo de cada trozo de cinta</td> <td style="border: none; padding: 0 10px;">x</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">Número de trozos de cinta</td> <td style="border: none; padding: 0 10px;">=</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">Largo total de la cinta</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">2</td> <td style="border: none; padding: 0 10px;">x</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">3</td> <td style="border: none; padding: 0 10px;">=</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">6</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">Multiplicando</td> <td style="border: none; padding: 0 10px;">x</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">Multiplicador</td> <td style="border: none; padding: 0 10px;">=</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">Producto</td> </tr> </table>			Largo de cada trozo de cinta	x	Número de trozos de cinta	=	Largo total de la cinta	2	x	3	=	6	Multiplicando	x	Multiplicador	=	Producto		
2 cm	+	2 cm	+	2 cm																							
Largo de cada trozo de cinta	x	Número de trozos de cinta	=	Largo total de la cinta																							
2	x	3	=	6																							
Multiplicando	x	Multiplicador	=	Producto																							

Nota. Hemos mantenido el *multiplicador a la derecha, sin embargo más importante que su posición es su función. Es usual que la palabra "veces" se asocie a expresiones con el multiplicador a la izquierda, y la sentencia "multiplicado por" se asocie a la expresión de multiplicación con el multiplicador a la izquierda.*

UNIDAD MULTIPLICACIÓN I:**SUBUNIDAD 1. LA INICIACIÓN AL CONCEPTO DE MULTIPLICACIÓN****(3 SESIONES)****SESIÓN 3: USEMOS EL MODELO DE LA MULTIPLICACIÓN****PÁGINA 1 DE 3**

Objetivo de la Sesión: Que el alumno construya nuevas situaciones que se ajusten al modelo de la multiplicación.

Pregunta Central: ¿Qué situaciones admiten una representación multiplicativa?

En esta clase el alumno debiera mostrar familiaridad con la multiplicación y sentir la necesidad de saber las tablas de multiplicar.

Prof.: En las clases anteriores aprendieron la multiplicación como una nueva forma para calcular el total de objetos agrupados en platos, bolsas, cajas, etc. ¿Qué condición deben cumplir los grupos para que se puedan representar por la multiplicación?

Alumnos: Los grupos tienen el mismo número de objetos.

Prof.: ¿Alguien recuerda algún ejemplo visto en clases?

Alumno recuerda un ejemplo.

Situación Problema: ¿Qué situación, distinta a las ya vistas en clases, es de tipo multiplicativa?

Prof.: En la clase de hoy, ustedes inventarán nuevas situaciones, partiendo de esquemas o dibujos creados por ustedes. Problemas cuyos cálculos podamos representar usando la multiplicación.

Prof.: Dibujen un esquema en el cuaderno. Escriban cuál es el número de objetos en cada grupo y cuál es el número de grupos que forman la situación.

Alumnos trabajan en sus cuadernos.

Prof. (Después de 5 a 10 minutos): ¿Quién muestra su trabajo al curso?... Van a salir 3 alumnos a la pizarra ...



Antes de proponer el problema, el profesor verifica que los alumnos recuerden el modelo de la multiplicación.

El profesor da tiempo para que los alumnos piensen y dibujen.

Mientras los alumnos dibujan, el profesor se recorre los bancos, observando las producciones: si dibujan grupos de igual número de objetos, si emplean números apropiados, si representan magnitudes.

En base a tales observaciones, elige a 3 alumnos de modo que dibujen respuestas variadas en la pizarra.

El profesor además pide a los otros dos alumnos que por el momento vuelvan a sus bancos.

Un alumno construye una situación multiplicativa. Luego, escribe la multiplicación que corresponde.

UNIDAD MULTIPLICACIÓN I:	
SUBUNIDAD 1. LA INICIACIÓN AL CONCEPTO DE MULTIPLICACIÓN	(3 SESIONES)
SESIÓN 3: USEMOS EL MODELO DE LA MULTIPLICACIÓN	PÁGINA 2 DE 3
<p>Prof. (Una vez que los alumnos terminan sus dibujos): Vamos a escuchar al primer alumno...</p> <p>Un alumno considera grupos con distintas cantidades. Algunos compañeros cuestionan su trabajo. La conversación se centra en el error y en su corrección. El alumno toma conciencia del error cometido y de la forma de enmendarlo.</p> <p>Prof. (Solicitando a la segunda alumna que vuelva a la pizarra): Analicemos la segunda situación.</p> <p>Alumna explica la situación inventada por ella. Prof.: ¿Cómo obtienes el número total de objetos?</p> <p>Posibles explicaciones por conteo o suma iterada. Si el cálculo mental es fácil, como 5 dos veces, puede ser que el alumno recupere directamente de su memoria el modelo "cinco 2 veces es 10", ya que los dedos de las manos son 10 y no necesita contar ni sumar. Si el cálculo es difícil, por ejemplo 4 cajas con 5 bombones cada una, posiblemente recurra a una estrategia como el doble de 2 cajas con 5 bombones.</p> <p>Prof. (Avanzando en el tema): ¿Cuál es la expresión matemática? ¿Puedes escribirla para la situación que propones?</p> <p>Alumna escribe en la pizarra $5 \times 4 = 20$ (u otro cálculo, según el ejemplo desarrollado).</p> <p>Prof.: ¿Qué significan los número en la expresión?, ¿qué significa el 5? ¿El 4? ¿El signo "x"? ¿El 20?</p> <p>Alumna: 5 corresponde al número de bombones y 4 al número de cajas de bombones...</p> <p>Prof. (Tras exponer la segunda alumna, invita a la tercera para que explique su trabajo): Gracias, ahora veamos cómo lo pensó tu compañera...</p> <p>Alumna (quien propuso una situación referida a magnitudes): Cada carro mide 3 cm. El tren tiene 4 carros. El largo total del tren es de 12 cm.</p> <p>Prof.: ¿Cuántos carros hay? ... ¿Cuántas veces repites el largo del carro?... ¿Cuál es la expresión matemática?... ¿Cómo sabes que el largo total del tren es 12?... ¿Cómo lo calculaste?</p>	<p>El profesor no borra el trabajo del alumno, sino que agrega notas al margen, corrigiendo.</p> <p>El profesor procura que surjan las expresiones "número de objetos por grupo" y "número de grupos", da "un número total de objetos".</p> <p>Es importante que el profesor dé tiempo para que el alumno verbalice en qué pensó para llegar al resultado, así sus compañeros notarán que existen varias formas.</p> <p>Luego, el profesor incentiva a que el alumno escriba la expresión matemática. Una vez escrita, solicitará que explique la relación entre la forma matemática y la situación.</p> <p>El profesor intenta que el alumno justifique el uso del modelo, como una manera para calcular un total, en situaciones donde hay un mismo número de objetos por grupo y se conoce el número de grupos.</p> <p>El profesor aprovecha a reforzar el uso del término veces. Por ejemplo: 4×3, el cuatro una vez, el cuatro dos veces, el cuatro tres veces. 4 repetido 3 veces.</p>

UNIDAD MULTIPLICACIÓN I:	
SUBUNIDAD 1. LA INICIACIÓN AL CONCEPTO DE MULTIPLICACIÓN	(3 SESIONES)
SESIÓN 3: USEMOS EL MODELO DE LA MULTIPLICACIÓN	PÁGINA 3 DE 3
<p>Alumna (animada): Profesor, ¿puedo presentar mi situación?</p> <p>Prof.: Pase a la pizarra. (Mientras la alumna dibuja, el profesor pide a los alumnos que anoten las situaciones analizadas y recorre la sala).</p> <p>Alumna (situación encubierta de cajas apiladas): Tengo 6 lápices en cada caja. Como la pila es de 4 cajas. En total tengo 24 lápices. La expresión es $6 \times 4 = 24$.</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>Prof.: ¿Cómo calculaste? ¿Cómo sabes que seis lápices 4 veces es lo mismo que 24 lápices?</p> <p>Alumna: Tengo 12 lápices en mi estuche. Así que pensé: tengo 12, que corresponden a dos cajas de 6. Y como tengo que agregar 2 cajas más, debo sumar 12 a mis doce lápices. Luego, conté 13, 14, 15,..., llegué a que 12 más 12 es 24.</p> <p>Prof.: 6 lápices 4 veces dan 24 lápices. Bien, ¿de qué otra forma lo podemos decir?, si tenemos cajas de seis lápices. ¿Alguien puede decir otra forma para calcular el total de lápices que hay en 4 cajas?</p> <p>Alumno: Sumo 6 más 6, más 6 y más 6; el 6 cuatro veces.</p> <p>Prof. (A modo de cierre): Aquí tenemos otra situación (puede ser la producción de un alumno o alguna inventada por el mismo profesor): "Cada niño recibió 8 bolitas y son 7 niños". Calculemos el total de bolitas. ¿De qué manera podemos calcular el número total de bolitas?</p> <p>Alumnos proponen sumas iteradas, conteo, ordenamiento por bloques, filas y columnas y otras agrupaciones con sumas auxiliares. El profesor da el tiempo para ello y los alumnos constatan que pese a entender el problema, no es fácil llegar a la respuesta. Si termina la hora, el profesor puede dejar el problema para la clase siguiente.</p>	<p>El profesor nota que la situación es interesante y que quedan unos minutos de clase.</p> <p>El profesor ordena sus preguntas con el objeto de avanzar en la clase conforme al plan que él ha ideado. Plantea preguntas en cuyas respuestas espera ver aparecer el modelo de la multiplicación.</p> <p>Los alumnos van fijando en sus mentes algunos valores de las tablas, a partir de las experiencias puntuales, por ejemplo 6×4 y 5×2.</p> <p>Una forma eficiente de llegar al resultado es recordar de memoria las tablas. Poco a poco valoran la ventaja de saberlas, además, memorizan lentamente las tablas.</p> <p>Esta situación con números algo más grandes provoca que los alumnos vivan la insuficiencia del modelo aditivo y sientan la necesidad de aprender las tablas. De esta forma el profesor prepara el ambiente para el aprendizaje de las tablas.</p> <p>El profesor puede asignar la siguiente tarea: Escribir un problema verbal para la sentencia matemática 6×4. Identificar arreglos 4×3 y 6×2 para 12. Ofrecer una situación con grupos que tengan distinto número de elementos.</p>

Enseñanza de las tablas y de las propiedades de la tabla

Orientaciones para la enseñanza de las tablas y sus propiedades

- Memorización y comprensión para avanzar en las tablas

En Japón los niños logran aprender con mucha rapidez las tablas. Ello se atribuye en parte a factores culturales que lo favorecen. En primer lugar, integran el lenguaje gráfico con el simbólico, escrito y oral. Las palabras usadas son breves y se aprenden recitadas como una canción en la edad en que los niños están llanos a aprender con mucha apertura. “Ni ichi ga ni, ni ni ga shi, ni san ga roku (dos por uno, dos; dos por dos, cuatro; dos por tres, seis)...” se recita en 20 segundos y lo hace bien la mayoría de los niños a los 9 años.

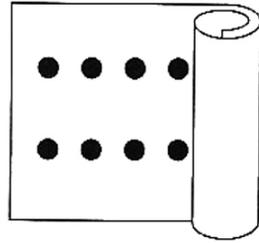
Otro factor que facilita el aprendizaje de las tablas es la articulación de los procesos de memorizar, aplicar y aprender a aprender. Por ello los profesores japoneses procuran idear la mejor manera para que los niños puedan adelantar el estudio por sí mismos aplicando lo aprendido. Cuestión que han trabajado por años y lo han transmitido en el marco del Estudio de Clases.

Los profesores articulan diversas técnicas. Pegan en la pared del aula láminas con contenidos relacionados con lo aprendido o láminas que muestren ordenadamente o insinúen la ventaja de cada forma de razonar para que lo utilicen según la necesidad. Hacen ver a los niños la ventaja de estudiar “aplicando lo aprendido” mediante actividades donde necesitan recordar lo aprendido o darse cuenta de la ventaja de ese método dentro del desarrollo de la clase. Así los niños aprenden los contenidos y también “formas para aprenderlos”. Claramente, el proceso va más allá de la memorización, incluye comprensión y articulación.

Los profesores utilizan secuencias de actividades prácticas para lograr la memorización. El siguiente es un ejemplo con la tabla del 2, primero bajo una orientación individual y luego bajo una grupal:

1. Pedir a los niños repitan un par de veces, desde “ 2×1 ” hasta “ 2×9 ”, observando la tabla puesta en una lámina o la pizarra.
2. Cubrir el producto de “ 2×1 ” con un papel y pedir que lo digan (luego levantar el papel para verificar la respuesta).

3. Preguntar a los niños: "¿Dos por uno...?", y cuando contesten "dos", continuar hasta dos por cinco. Solicitar que visualicen y que repitan la secuencia de dos en dos, hasta 10 para favorecer la memorización.
4. Hacer que los niños digan desde "2x1" hasta "2x5", descubriendo paulatinamente los productos. Luego cubrir el producto de "2x6" y preguntar cuánto es. Cuando contesten, pedir 2x7 y así hasta 2x9.



Ejemplo:
¿Dos por cinco es?

5. Dejando el producto de "2x1" y "2x2" cubiertos, hacer que los niños digan la tabla desde "2x1" hasta "2x9". Repetir la actividad dejando cubiertos más productos, hasta cubrirlos todos.
6. Pedir a los niños que se pongan de pie y que digan en voz baja la tabla completa y qué sienten una vez que terminen. Además, solicitarles que registren el tiempo. El profesor observa qué alumnos demoran más y quiénes demoran menos.

Terminada la clase, a veces dejan en la pared del aula la lámina de la tabla con los productos cubiertos por papeles colgantes. Los niños practican libremente con la alegría de confirmar sus respuestas al levantar los papeles.

Para la orientación grupal, los profesores procuran actividades que aumenten el entusiasmo. Varían la asignación de tareas de modo que sean más demandantes y a veces competitivas. Piden a los alumnos que repitan por turno, por ejemplo juntos, por fila, niños y niñas alternadamente, uno por uno en orden, uno por uno al azar, etc.

La práctica de la tabla incluye cuatro pasos: (1) Decir la tabla correctamente observando la expresión o la colección de círculos, (2) decir desde 2x1 hasta 2x9, (3) decir la tabla de abajo para arriba, y al revés y (4) decirla al azar.

El alumno alcanza la comprensión en la medida que relaciona la expresión matemática con el significado y con otras expresiones, en el primer caso, las agrupaciones representadas por la colección de pelotas, que a su vez le evoca platos con frutas, columnas con cubos, entre otras. En el segundo caso, el alumno gana comprensión al relacionar cada expresión con la siguiente de la tabla, por ejemplo $2x4 + 2$ es $2x5$.

Sugerimos al lector revisar la clase del profesor Tsubota en la página 128 de este libro, en la que apreciará que lo medular no es la repetición.

- Las sugerencias de los textos

Los tres textos estudiados, de Gakkoh Tosho, Tokyo Shoseki y PROMETAM, tal como lo indica la Guía de Enseñanza, apuntan al objetivo de la construcción, memorización y aplicación de las tablas de multiplicar del 1 al 9. Un objetivo inicial es que los alumnos se familiaricen con las tablas, memoricen al principio algunos productos y sean capaces de deducir los restantes. Se espera que, con el uso y los meses, memoricen gran parte de las tablas y deduzcan con rapidez las que no aprendan de memoria.

En los tres textos citados se inicia la enseñanza de las tablas solicitando al alumno que construya la tabla a partir de situaciones. El alumno encuentra los productos por conteo o con sumas iteradas. Ninguno de los textos presenta las tablas como contenidos matemáticos ya dados, son los alumnos quienes construyen las tablas. El estudio de las tablas incluye la comprensión, memorización y establecimiento de relaciones, como formulación de conjeturas, desarrollo de estrategias de cálculo, justificaciones y aplicaciones. Se trabaja simultáneamente el cálculo mental y la representación escrita. Tras estudiar las tablas según el siguiente orden: 2 y 5; 3 y 4; 6, 7, 8 y 9, y la multiplicación por 1, se termina el estudio de las tablas con una representación bidimensional a partir de la cual conjeturan y comprueban propiedades.

Las clases o sesiones de 45 ó 90 minutos se agrupan en lecciones. En el texto de Editorial Gakkoh Tosho, el estudio de la tabla del 2 constituye una lección con 5 actividades (2 páginas del texto). De Editorial Tokyo Shoseki, el estudio de las tablas del 2 y 5 constituyen una lección con 4 situaciones en las que se desarrollan 2 a 4 actividades en cada una (4 páginas del texto). El texto del Proyecto PROMETAM contempla una lección de 12 sesiones en la que se estudian las tablas del 2, 5, 3 y 4, y además, las propiedades de la tabla en su representación bidimensional. Para la construcción de la tabla del 2 contempla 4 actividades (1 página) y para la memorización de la tabla del 2 incluye 6 actividades principales (otra página).

Independiente de los contenidos que se estén tratando en estos textos, la mayor parte de las páginas, sobre el 70%, se refieren a situaciones para introducir nuevos conceptos. Las páginas adicionales se refieren a juegos, desafíos, actividades complementarias y muy poco a actividades de ejercitación. La

situación es algo distinta en el texto construido para Honduras en el marco del proyecto PROMETAM, ya que alrededor del 20 al 30% de las páginas de cada lección se destinan a actividades de ejercitación. Ello se debe a que en Japón los alumnos disponen de muchos materiales para ejercitar, los cuales usualmente son provistos por los institutos a los cuales asiste la mayoría de los niños en la tarde para repasar las materias estudiadas en las escuelas. Estos institutos contemplan alrededor de 2 horas diarias 5 días a la semana y en ellos estudian asignaturas como lenguaje, ciencias y matemáticas.

Para la enseñanza del concepto de multiplicación y de las tablas de multiplicar se contempló en los textos alrededor de 35 horas de clases, distribuidas como sigue:

Contenidos de las subunidades	Número de horas de clases
1. Sentido de la multiplicación	3 horas de clases
2.1. Tablas del 2 al 5	12 horas + 1 que ejercita y aplica
2.2. Tablas del 6 al 9	12 horas + 1 para la ejercitación
2.3. Multiplicación por 1*	1 hora
3. Propiedades de la tabla	3 horas + 2 de práctica y desafíos

* En algunos textos de Japón aparece la multiplicación por 0 en estas subunidades. En otros, como en el caso de estas orientaciones, el 0 es tratado con los multidígitos.

Las actividades empleadas en los distintos textos para enseñar las tablas de multiplicar son similares. Por ejemplo, la Editorial Gakkoh Tosho presenta siete actividades para introducir la tabla del 2, y esas mismas actividades son utilizadas con escasa variación para el tratamiento de las tablas del 5, 3 y 4.

Las actividades contempladas por el texto de Editorial Gakkoh Tosho para presentar la tabla del 2 son:

- 1 Situaciones con cantidades discretas (platos o bolsas con frutas o dulces, torres de cubos).
- 2 Actividad que introduce el modelo $2 \times _ = _$ y su lectura.
- 3 Uso de tarjetas con respuesta del producto al reverso.
- 4 Construcción y lectura de la tabla hacia adelante y atrás.
- 5 Dibujar o representar situaciones de multiplicación.
- 6 Determinar el producto dada una situación multiplicativa.
- 7 Construir un problema a partir de una expresión del tipo 2×7 .

Las actividades propuestas en el texto de Editorial Gakkoh Toshō para presentar las tablas del 2, 5, 3 y 4 son:

Actividad	tabla del 2	tabla del 5	tabla del 3	tabla del 4
1. Situaciones...	sí	sí	sí	sí
2. Actividad...	sí	variación	variación	variación
3. Uso de tarjetas	sí	sí	variación	variación
4. Construcción...	sí	sí	no	no
5. Dibujar...	sí	no	variación	variación
6. Determinar...	sí	sí	variación	variación
7. Construir...	sí	sí	sí	sí
8. Otra actividad	no	sí	sí	variación

Estas situaciones de aprendizaje son similares a las de textos de otras editoriales. Por ejemplo, en atención a la enseñanza de la tabla del 2, la tabla de abajo muestra un paralelo entre las situaciones usadas en los textos de Gakkoh Toshō, Tokyo Shoseki, y del PROMETAM. La tabla deja ver la similitud entre las actividades de aprendizaje y situaciones problemas de las distintas editoriales.

Actividades para aprender la tabla del 2	Editorial Gakkoh Toshō	Editorial Tokyo Shoseki	Texto Proyecto PROMETAM
1. Situaciones multiplicativas	si	sí	sí
2. Encontrar productos	si	si	si
3. Uso de tarjetas	si	sí	si
4. Construcción de la tabla	sí	sí	si
5. Representar con dibujo	si	no	no
6. Responder a problemas	si	sí	si
7. Construir problemas	si	si	no
8. Practicar con filas de círculos	no	sí	sí

Uso de materiales para la memorización y la comprensión

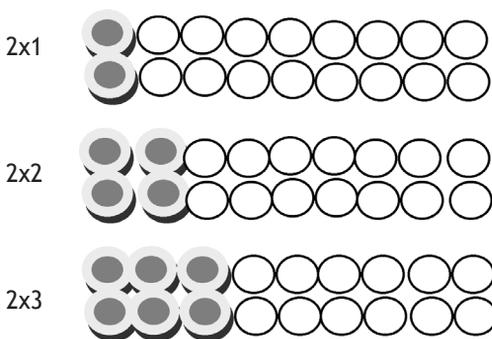
En Japón, los profesores usan materiales especiales para la enseñanza de la tabla de la multiplicación. Entre estos materiales están las láminas con colecciones de círculos, las tarjetas o naipes para el uso de los alumnos y las libretas para registro de logros.

- *Uso de la colección de círculos*

Los círculos se cubren parcialmente con una hoja. Es muy ilustrativo usarlos en el paso de la construcción de las tablas y además en la práctica de las tablas. Como se usa para el tratamiento de las distintas tablas de multiplicar, se recomienda dibujar en una lámina los círculos para la tabla del 9 y utilizarla doblada mostrando solamente la parte que representa la tabla requerida. La cantidad de círculos verticales representa al multiplicando o cantidad en cada grupo. Se puede presentar la situación y el producto de la multiplicación moviendo horizontalmente el papel que cubre los grupos.

Cómo se indicó en la página 93 de este libro, el profesor puede desplegar en la pizarra la lámina con los círculos, taparlos todos con un papel, salvo la primera columna, como se muestra abajo.

(Ejemplo de la tabla del 2)



Luego, el profesor puede descubrir la segunda columna moviendo el papel lentamente hacia la derecha, y así sucesivamente repasar 2×1 , 2×2 , $2 \times 3 \dots$ hasta completar el repaso de la tabla del 2.

- Uso de tarjetas y naipes

Las tarjetas tienen en el anverso la expresión de la multiplicación o procedimiento operatorio (PO) y en el reverso el producto. El maestro puede preparar las tarjetas de tamaño adecuado y usarlas para la práctica de la memorización. La manera fundamental de practicar las tablas de la multiplicación usando las tarjetas de la multiplicación es la siguiente:

Uso individual. A: Colocar las tarjetas en orden (al azar) y decir los productos del reverso observando el PO de la cara. (Se puede hacer que los niños y las niñas coloquen alguna marca en las tarjetas con las que se equivocaron y que practiquen principalmente con ellas. B: Colocar las tarjetas en orden (al azar) y decir el PO de la cara observando los productos del reverso; y C: Realizar las prácticas de (A) ó (B), con varias tablas de la multiplicación.

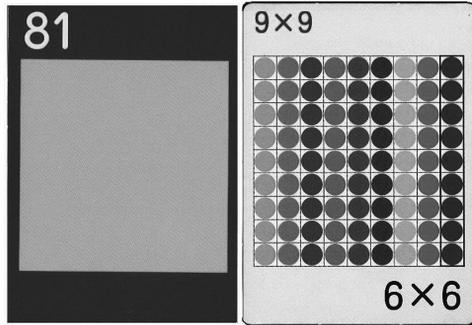
Uso en pareja. A: Un niño muestra la cara de la tarjeta y el otro contesta el producto observando esa tarjeta. Repetir esta actividad alternativamente. (O también hasta cuando un participante conteste correctamente cambiar los papeles, o se puede hacer la competencia de contestar correctamente 5 veces por cada participante.) B: Cada uno de los niños o niñas prepara al azar las tarjetas de la misma tabla (es mejor que preparen las tarjetas de sólo una o dos tablas). Poner una tarjeta en la mesa al mismo tiempo con la cara hacia arriba, leer el PO y contestar observando su tarjeta. El o la que tenga el producto mayor gana; y C: Colocar en la mesa las tarjetas con la cara hacia arriba, un niño o niña escoge una, lee el PO y contesta el producto. Mirar el producto del reverso y si contestó correctamente toma esa tarjeta y puede continuar con otra tarjeta. Si se equivoca pierde su turno y no puede tomar la tarjeta. El que consiga más tarjetas gana (se puede hacer que cambien el turno alternadamente).

Uso en pareja o en grupo: A: Colocar las tarjetas en la mesa con el reverso (el producto) hacia arriba. Un niño o niña preguntará a sus compañeros y compañeras diciendo el PO de las tablas que están en la mesa. Los demás buscarán el producto de esa pregunta y tomarán una de las tarjetas que tiene ese producto. El que consiga más, gana. B: Colocar las tarjetas en la mesa con la cara (el PO) hacia arriba y un niño o niña preguntará diciendo el producto al PO de las tablas que están en la mesa. Los demás buscarán el PO de esa pregunta y tomarán una de las tarjetas que tiene ese PO. El que consiga más tarjetas gana.

Es recomendable que los niños inventen otra manera con las ideas del maestro o la maestra y de los niños y las niñas y que las utilicen pensando en la situación real de los niños. Es recomendable tomar los primeros 3-5 minutos de cada hora de clase para practicar todos juntos, ya que la clave de la memorización es practicar todos los días.

- *Uso de Naipes ilustrados*

Hasta ahora -dice el profesor Tanaka (2007)- las cartas de tablas de multiplicar sólo tenían una fórmula en la cara y la respuesta correspondiente en el reverso. Debido a esto, aunque se aprendiesen las tablas de multiplicar, no se



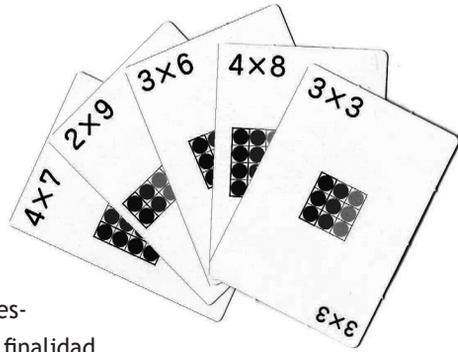
llegaba a un entendimiento de su significado, ni era posible la formación de una imagen de las expresiones (PO). En estas "Cartas de tablas de multiplicar ilustradas" encontramos figuras de las expresiones, las cuales permiten formarse una imagen de las cantidades. En el reverso de las cartas está dibujada la silueta del arreglo y el número que corresponde a la respuesta. Son cartas de tablas de multiplicar ambiciosas, que permiten desarrollar una rica sensibilidad numérica, haciendo que números y expresiones, formas y cantidades, encajen. Jugando con estas cartas pueden aprenderse las tablas de multiplicar de una forma divertida y casi sin darse cuenta.

El autor de estos naipes es el Profesor Hiroshi Tanaka de la escuela primaria de la Universidad de Tsukuba, representante de la Sociedad de investigación para clases de aritmética y TI, Presidente de la Sociedad nacional de investigación para clases de aritmética y Autor de libros de texto de aritmética de Gakko Toshō S.A.

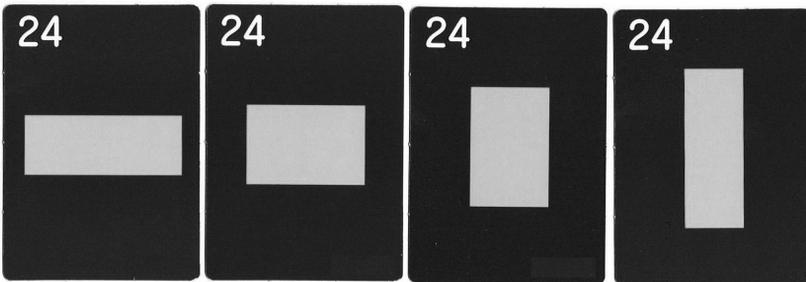
- *Características de las Cartas de tablas de multiplicar ilustradas*

Cara de las cartas: Las figuras que representan un grupo están rodeadas por un marco, con la finalidad de hacerlas fáciles de entender. El grupo representa al multiplicando. Ahora veamos cuántas columnas hay con el mismo número, de círculos (es fácil de entender si pensamos en el número de colores que hay). Este número representa el multiplicador.

La expresión de multiplicación (PO) está escrita dos veces, una en la parte de arriba y la otra en la parte de abajo, como es usual en los naipes. Al momento de usar las cartas, la expresión escrita con letras grandes va hacia arriba. Las figuras que representan un grupo están rodeadas por un marco, con la finalidad de hacerlas fáciles de entender. Las expresiones escritas con letras pequeñas están divididas en cuatro grupos de colores diferentes.



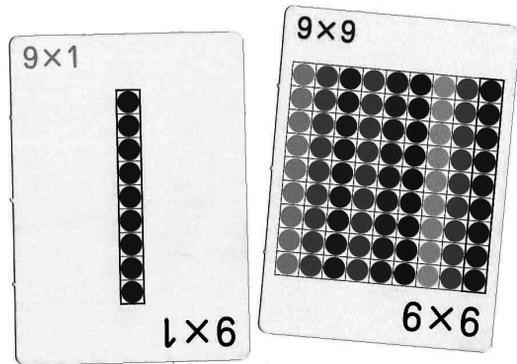
Reverso de las cartas: El número que corresponde a la respuesta de la tabla de multiplicar está escrito en la parte superior izquierda. El hecho de que la respuesta esté escrita sólo en un lugar tiene su significado; está pensado para que tenga varios usos al momento de jugar. Además, aparece una silueta de forma rectangular que representa el arreglo en su totalidad. El número es la respuesta de la expresión (PO) que aparece en el anverso de la carta. Por ejemplo, el número 24 existe dentro de las tablas de multiplicar como rectángulos que tienen diferentes formas, como puede observarse en la imagen de abajo.



Cómo jugar (Primera parte): (1) Colocar las cartas con la cara hacia arriba. (2) Una persona lee la expresión. (3) Los demás participantes buscan la carta que corresponda a dicha expresión. (4) Gana la persona que al final haya reunido el mayor número de cartas.

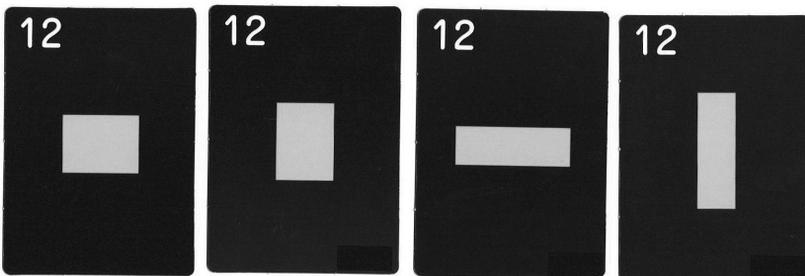
El hecho de usar los arreglos, no sólo expresiones, acelera la búsqueda.

Por ejemplo, en los casos de 9×1 y 9×9 , las imágenes son muy diferentes, como puede observarse en la figura de la derecha. Cada vez que se lee una expresión, y mediante la observación de este tipo de figuras, se profundiza el entendimiento de las tablas de multiplicar.



Cómo jugar (Segunda parte): (1) Colocar las cartas con el reverso hacia arriba. (2) Una persona lee la expresión. (3) Los demás participantes buscan la carta que contenga el número correspondiente a la respuesta de dicha expresión. Al lado del número correspondiente a la respuesta hay una figura que podemos usar para buscar la carta en cuestión. (4) Gana la persona que al final haya reunido el mayor número de cartas.

Por ejemplo, para 3×4 buscamos la carta que contenga el número 12, pero en realidad hay cuatro cartas que lo contienen. Aun así, podemos notar que las formas son diferentes para las cuatro cartas, como se observa en la figura de abajo. ¿Cuál será? Es un juego que vincula de diversas maneras imágenes de expresiones con imágenes de figuras.

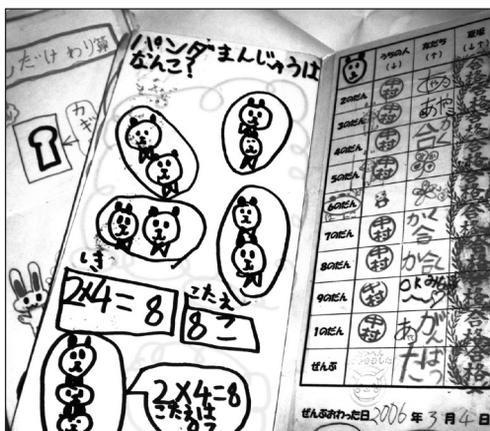


- Uso de hoja o libreta de registro de avance

La libreta u hojas de memorización se usan para elevar el entusiasmo de la memorización de la tabla y para confirmar el progreso. Hay que tener cuidado de no provocar la caída del entusiasmo de la memorización al apresurarlos

demasiado. El uso de la hoja también se puede cambiar según las circunstancias y situaciones de los niños.

- 1) Hay tres formas de memorizar las tablas que son: “en orden”, “de abajo para arriba” y “en desorden”. Los niños deben practicarlas para que puedan decir las tablas de cualquier manera.
- 2) Los niños pueden practicar y desafiar primero en cualquier tabla aprendida y de cualquier manera.
- 3) Cuando tengan confianza de la memorización, los niños y las niñas buscarán el tiempo libre (el receso, antes de empezar la primera clase, después de terminar la clase para que el maestro escuche la memorización de ellos). Cuando pueda decir la tabla completa de una manera recibirá la firma del maestro mostrando el logro.
- 4) Los que recibieron la firma del maestro o la maestra pueden ser los “estudiantes monitores”. Y podrán escuchar el desafío de sus compañeros y compañeras en lugar del maestro. Después de aprobar el nivel de la memorización de los compañeros que desafiaron pueden otorgarle su firma.



- 5) El “estudiante monitor” puede escuchar el desafío de sus compañeros solamente para las tablas y las maneras en las que recibió la firma del maestro. Por lo tanto, los demás buscarán al compañero monitor que tenga la firma del maestro en la casilla que ellos quieran desafiar.
- 6) Cuando tengan las firmas del maestro o la maestra, o del estudiante monitor, en todas las casillas, pueden recibir el diploma. Si se cometen errores en la memorización después de practicar nuevamente se puede desafiar muchas veces más hasta que venza el desafío.

* Se adopta la manera en que los estudiantes monitores también firman a

otros compañeros para que los niños se apoyen y colaboren mutuamente, y también para utilizar el tiempo efectivamente. En este caso es mejor que el maestro confirme el nivel de la memorización aprobado por el estudiante monitor, llamándoles según la necesidad. Cuando ellos puedan decir correctamente la tabla es mejor que les felicite, a ese niño o niña y al estudiante monitor que firmó. A través de la felicitación los estudiantes monitores tendrán más entusiasmo de aprobar a su compañero o compañera en la memorización con responsabilidad y juicio justo.

* Se puede decidir sobre cuál práctica hay que hacer como mínimo antes de desafiar nuevamente cuando fracasen al desafío. Por ejemplo: decir más de 5 veces el Procedimiento Operatorio (donde se equivocó y decir toda la tabla más de 2 veces antes de desafiar de nuevo, etc.)

* El maestro debe recoger las hojas frecuentemente para chequear el progreso de los niños y las niñas y también deben tener en cuenta la motivación y orientación individual para los niños y niñas con dificultad para avanzar.

Sugerencia de los programas para la enseñanza de las tablas

- La enseñanza de las tablas en la Guía de Japón

La Guía de Enseñanza para profesores del Gobierno de Japón establece, "cuando se enseñe la tabla de multiplicar, es importante no sólo que los alumnos memoricen las tablas, sino que hay que ayudar a los niños a componer las tablas por sí mismo y aprender de ello.

La tabla de multiplicación es una destreza muy básica para poder multiplicar y luego es indispensable en los cálculos de multiplicaciones. Luego es importante vincularlas con experiencias concretas cuando se enseñen. Es importante también ayudar a los niños a dominar cada fila de la tabla para que puedan encontrar respuestas lo más rápido posible".

Con respecto a las propiedades de la tabla de multiplicar, la Guía citada señala "Las propiedades más importantes de la multiplicación son aquí que el producto aumenta en el tamaño del multiplicando cuando el multiplicador aumenta en uno cada vez. Y la propiedad conmutativa. Cuando los niños componen las tablas de multiplicar por sí mismos, es importante para ellos ver el hecho que el producto aumenta en la

medida del multiplicando cuando el multiplicador aumenta en 1, y ver la propiedad conmutativa, y usar ellas efectivamente para componer las tablas de multiplicar o chequear los resultados de los cálculos. Si se aplican las propiedades de la multiplicación se puede hacer multiplicaciones de números simples de dos cifras. La multiplicación de números de dos cifras es enseñada en tercer grado, pero enseñar [números de una cifra] x [múltiplos de 10] o [múltiplos de 10] x [números de una cifra] puede ser visto como un desarrollo de la tabla de multiplicar, y puede profundizar el entendimiento de la tabla de multiplicar y cultivar el estudio de la multiplicación de dos cifras. Luego, es permisible enseñar esto en la medida que los alumnos estén en condiciones”.

- La enseñanza de las tablas en los programas chilenos

Tras introducir el concepto de multiplicación, los Programas de Estudio de Chile tratan la división como operación inversa y, en el mismo **primer semestre de tercero básico**, tratan las tablas de multiplicar para los números 2, 5 y 10 y para los múltiplos de 10 (Act. 5, Pág. 189 a 192), vinculando cada una de ellas a la división como operación inversa. El propósito es que los alumnos dominen el cálculo mental de esas tablas. Se expone a continuación algunos de los ejemplos usados por el Programa para que los alumnos memoricen la tabla del 2 y sean capaces de usarla en otras situaciones.

Ejemplo 1, primer semestre tercero básico.

“• Para memorizar la tabla del 2:

- Confeccionan una tabla con la expresión matemática que corresponde a la siguiente situación. Si por 1 moneda me dan 2 dulces, cuántos dulces me darán por 2 monedas, 3 monedas, 4 monedas... 10 monedas. En cada caso anotan la expresión matemática correspondiente ($1 \times 2 = 2$; $2 \times 2 = 4$; $3 \times 2 = 6$; $4 \times 2 = 8 \dots$) obteniendo los resultados a través de sumas reiteradas y explicando, ya sea usando material concreto o representaciones gráficas, lo que hicieron cada vez y lo que representan los factores y el resultado de la expresión anotada. Posteriormente, el docente explica que es conveniente ejercitar esta relación ya que aparece en múltiples situaciones y corresponde a una multiplicación de números del 1 al 10 por 2 lo que generalmente se denomina como la “tabla del 2”.

- Dicen de dos en dos la serie numérica a partir del 2 hasta 20 y comparan los valores obtenidos con la tabla de multiplicar que confeccionaron anteriormente. Comentan acerca de por qué se obtienen los mismos resultados y qué características tienen los números que resultan al multiplicar por 2.
- Responden rápidamente a preguntas expresadas en diferentes formas, tales como: 2 veces 3; 5 multiplicado por 2; multiplica 4 por 2; el doble de 8; un objeto vale \$10, cuánto valen 2; ¿cuántas manos habrá si se juntan 8 personas?"

Reflexión: Se exponen a continuación tres comentarios con respecto a los ejemplos citados del Programa de Chile.

Primero: Los ejemplos son consistentes con las indicaciones de la Guía de Enseñanza de Japón, que propone conectar la tabla de multiplicar con experiencias concretas. Sin embargo, es muy importante señalar que la Guía de Enseñanza japonesa destaca que la memorización se ha de alcanzar en el seno de la composición de la tabla. Es decir, la composición es una actividad central en el proceso de memorización con sentido para el alumno, y por ello central en la manera de hacer clases en Japón. La clase se centra en la pregunta ¿cómo podemos calcular cada producto de la tabla? La clase se transforma en una actividad de indagación, donde los alumnos desarrollan estrategias de "resolución de problemas" y en donde el centro de la clase es "la actividad del alumno" y el rol del profesor es plantearles las preguntas para que surja el conocimiento de ellos mismos.

Segundo: Se presentan los ejemplos de actividades como hitos aislados, sin hacer referencia a las formas posibles de establecer vínculos entre ellos. Desde la perspectiva de Chevallard (1999), la idea sería trabajar la organización matemática más completa, pasando de la tarea a la búsqueda de técnicas alternativas y más óptimas, como también a las justificaciones más teóricas de las mismas.

Tercero: Se sugiere que el alumno compare la serie numérica de dos en dos con los valores de la tabla de multiplicar y se pide que los alumnos comenten acerca de por qué se obtienen los mismos resultados. Sin embargo, en las sugerencias al docente no se relaciona esa actividad con la propiedad matemática que define a la multiplicación, muy destacada en la Guía de Enseñanza japonesa, "el producto aumenta en la medida del multiplicando cuando el multiplicador aumenta en 1".

A continuación se presentan otros ejemplos de la Actividad 5 del programa chileno (Pág. 190) que tienen por objetivo consolidar el aprendizaje de las tablas del 2, 5 y 10:

Ejemplo 2, primer semestre tercero básico.

- Juegan a competir con la calculadora. Se plantean una multiplicación (2×8) y al tiempo que piensan su resultado lo hacen utilizando la calculadora. De esta forma pueden ver qué les resulta más rápido, si con la calculadora o mentalmente.
- A partir de un producto conocido deducen otros desconocidos y los comprueban con la calculadora. Ejemplo: $2 \times 3 = 6$ entonces, 20×3 será igual a 60 y 20×30 será igual a 600, 200×300 será igual a 60 000, etc. Si $2 \times 15 = 30$, entonces 3×15 será igual a $30 + 15$, es decir 45 y 4×15 será igual a $30 + 30$, es decir 60.
- Competencia de multiplicaciones entre equipos. Se hacen dos bolsas con papeles que contienen los mismos productos del tipo $U \times U$ ó $DO \times U$ (2×3 ; 5×7 ; 10×9) o de acuerdo a las tablas de multiplicación que se deseen ejercitar. Se forma dos grupos y en un tiempo predeterminado (por ejemplo, 10 minutos) diferentes miembros de cada grupo deben ir retirando un papel de una de las bolsas y entregando la respuesta a un jurado.

Reflexión: Cuatro comentarios con respecto a estos ejemplos de actividad.

Primero: Se presentan dos actividades competitivas que destacan la dimensión lúdica del aprender matemáticas. Las competencias propuestas ponen el acento en la rapidez de pensamiento y el azar. De acuerdo a la filosofía de la enseñanza japonesa sería interesante contemplar otras actividades lúdicas que pongan el acento en la componente estratégica de los juegos. Los alumnos, mientras construyen las tablas pueden ir detectando propiedades en ellas, lo que en la tradición japonesa se denomina "los misterios de las tablas".

Segundo: La segunda actividad pretende que los alumnos deduzcan nuevos productos a partir de multiplicaciones conocidas. Esta actividad es consistente con la Guía de Enseñanza japonesa, la cual hace notar que los alumnos al componer las tablas aprenden de ellas. Por ejemplo, notan que se cumple la propiedad conmutativa y hacen uso de esa propiedad para verificar sus

cálculos y disponer de estrategias que les permita encontrar nuevos resultados. Sin embargo, cabe hacer notar que los cálculos numéricos provistos en este ejemplo de actividad distan de los ejemplos que aparecen en la Guía de Enseñanza de Japón. Pues cálculos como 30×15 y 200×300 además de estar relacionados a la tabla del 2 y del 10 dependen de las propiedades distributiva, asociativa y composiciones que escapan de la finalidad de aprender las tablas y sus usos. En este momento, en vez de ayudar a la comprensión del alumno, se lo puede confundir al complejizar la actividad. En la enseñanza de Japón se tiende a la simplicidad de modo que lo complejo se vea simple, por lo que se evita enfrentar al alumno a situaciones que no podrá resolver en el tiempo que se le propone que lo haga.

Tercero: Se echa de menos continuidad entre las actividades propuestas, aparecen aisladas y no como secuencias que tienden a la consolidación de un mismo objetivo. La actividades se separan del eje de la memorización. Por ejemplo, no se presenta de manera sistemática el uso de material concreto, representaciones o técnicas de visualización que favorezca la memorización en el marco de la comprensión. La Guía de Enseñanza de Japón señala la importancia de que los alumnos dominen cada una de las filas de la tabla de multiplicar, y sugiere que haya actividades que se concentren en ello, en base a estrategias en que los alumnos tengan un rol activo.

Para el **segundo semestre de tercero básico** el Programa de Estudio da ejemplos de actividades que permiten a los alumnos entender situaciones que relacionan la multiplicación con la división, favorecen en los alumnos la memorización de la tabla del 4, 8, 3 y 6, que les permiten deducir productos de una cifra por múltiplos de 10, y **que les ayudan a practicar el cálculo escrito de productos en que uno de los factores tiene una cifra o es un múltiplo de 10**. A continuación se exponen algunos de los ejemplos sugeridos para que los alumnos memoricen las tablas del 4, 8, 3 y 6 (Act. 6, Pág. 241).

Ejemplo 1, segundo semestre tercero básico.

- Para memorizar la tabla del 4, 8, 3 y 6:
 - Multiplican con la calculadora un dígito por dos; sin borrar, vuelven a multiplicar por dos y anotan el resultado. Multiplican el mismo dígito por cuatro. Repiten lo anterior con otros dígitos. Concluyen que la acción de doblar y doblar (multiplicar dos veces por dos) es equivalente a la acción de cuadruplicar (multiplicar por cuatro).

- Organizados en grupos contestan, sin usar la calculadora, ejercicios como: 2×5 , 4×5 ; 2×3 , 4×3 ; etc. Conversan si es posible aplicar un procedimiento parecido para encontrar el resultado de 8×5 ; 8×3 ; etc.
- Duplican una cantidad sucesivamente, con apoyo de tarjetas. Experimentan que duplicar corresponde a tener dos tarjetas de la misma cantidad de puntos, duplicar otra vez, corresponde a tener cuatro tarjetas de la misma cantidad de puntos, duplicar una tercera vez corresponde a tener ocho tarjetas de la misma cantidad de puntos. Por lo tanto, el doble del doble del doble de un número equivale a ocho veces el número o al doble del cuádruplo de un número.
- Dicen la secuencia numérica de 3 en 3, partiendo de 3, y juegan a sacar tres veces una misma cantidad. Por ejemplo, tres veces un lápiz, tres veces 2 lápices, 3 veces 3 lápices, etc. Anotan los resultados obtenidos y los comparan con los números de la secuencia de 3 en 3 partiendo de 3.
- Multiplican con la calculadora un dígito por tres; sin borrar, vuelven a multiplicar por dos y anotan el resultado. Multiplican el mismo dígito por seis. Repiten lo anterior con otros dígitos. Concluyen que la acción de triplicar (multiplicar por 3) y luego doblar (multiplicar por 2) el resultado obtenido es equivalente a la acción de multiplicar por seis.
- Triplican dobles con apoyo de tarjetas. Experimentan que triplicar el doble corresponde a tener tres grupos de dos tarjetas de la misma cantidad de puntos. Por lo tanto, el triple del doble de un número equivale a seis veces el número o al doble del triple de un número.
- En los casos anteriores, usan tarjetas para comparar los resultados del producto de dos números, variando su orden. Por ejemplo: de 4×5 y 5×4 . Concluyen que ambos casos se obtiene el mismo resultado, por lo que el saber una combinación, permite conocer la otra.

Reflexión: Cuatro comentarios con respecto a estos ejemplos de actividad.

Primero: Las ideas de duplicar, triplicar y duplicar dos veces están dentro de las sugerencias de la Guía de Japón, en cuanto permiten establecer relaciones al interior de la tabla completa de dos dimensiones y resultan propicias para el tratamiento integrado de tablas en cuestión, favoreciendo que los alumnos construyan sus propias técnicas para evocar las tablas cuando se les

olvide. El modo en que se proponen estas actividades difiere de la manera en que se diseñan las clases en Japón; las clases se estructuran en torno a una pregunta central, desde la cual surge la indagación personal y discusión entre los alumnos y permite que ellos mismos sean los que proponen y validan sus conjeturas.

Segundo: El uso de tarjetas es una herramienta valiosa en el contexto de las sugerencias de la Guía de Enseñanza. De hecho, las tarjetas constituyen un recurso usual en la tradición de la enseñanza en Japón, que favorece la manipulación y la visualización. El aprendizaje de las tablas exige su memorización, que tarda en alcanzarse, pero se logra cuando se entiende el significado de ella y se sabe cómo calcularla.

Tercero: Llama la atención la insistencia en el uso de la calculadora, pues su uso no refuerza la comprensión del sentido de la multiplicación, apareciendo como una caja negra que da respuestas confiables. La Guía de Enseñanza japonesa sugiere que la calculadora se use a partir del 5° grado para cálculos que resultan engorrosos a mano.

Cuarto: La sugerencia de que los alumnos conversen acerca de si es posible buscar un procedimiento, es totalmente consistente con el estilo de clases de matemáticas en Japón. La interacción verbal permite a los alumnos comunicarse y perfeccionar la comunicación, desarrollar la capacidad para escuchar a otros, dialogar, presentar ejemplos y contraejemplos, comprender puntos de vista distintos, valorar y hacer suyas las buenas ideas presentadas por sus compañeros, y a veces adoptándolas como nuevas estrategias. En fin, la conversación entre pares es una actividad central en el aprendizaje de las matemáticas.

Enseñanza de las tablas del 2 al 5

A continuación se presentan sugerencias para la enseñanza de las tablas del 2 al 5, las cuales en su mayoría son apropiadas para todas las tablas, y luego se presentan planes de clases para esas tablas.

- Entregar la responsabilidad de aprender al alumno

Hay formas de enseñar más eficientes que otras. En el contexto del proyecto PROMETAM el profesor Seiyama realizó una clase pública en que enseña la multiplicación por 2, la cual está disponible en el sitio web <http://www.>

criced.tsukuba.ac.jp/renkei/msa/20060500/

La Guía para el Maestro que los profesores japoneses elaboraron para el citado proyecto contempla dos clases para la memorización y aplicación de cada tabla, aparte de la clase para el descubrimiento de la tabla, que se centra en la comprensión.

La idea es responsabilizar al alumno del proceso de memorización, asumiendo el profesor la tarea de controlar. Para que los alumnos memoricen las tablas con solidez, se sugiere que todos los días las practiquen sin falta, más o menos 5 minutos al día (por ejemplo: decir la tabla en estudio inmediatamente después de llegar a la escuela, antes de entrar a clase, antes de salir al recreo, antes de salir de la escuela, etc.). Los niños deben memorizar las tablas apropiadamente para que consoliden la base para comprender la multiplicación multidígito al año siguiente.

El estudio de la tabla del 2 y del 5 puede ser conducido por el maestro, pero es mejor planificar el proceso del estudio de la tabla del 3 y del 4 de manera que los niños al manejar los materiales concretos sean quienes construyan esas tablas aplicando lo aprendido. El alumno puede encontrar el producto sumando el multiplicando una vez más al producto anterior de la tabla, así no necesita sumar desde el principio para encontrar el siguiente producto en la tabla. Otra sugerencia es que el profesor y los alumnos utilicen durante toda la unidad la colección de pelotas, las tarjetas de la multiplicación y la hoja de la memorización como un medio para la construcción, práctica y memorización de las tablas.

-Planificación de la Subunidad "Las tablas del 2 al 5"

Las siguientes páginas presentan una adaptación de los planes de clases referidos a la enseñanza de las tablas del 2 al 5 en una de las Guías para el Maestro en el marco del Proyecto PROMETAM.

La subunidad "las tablas del 2 al 5" contiene un total de 14 sesiones, de las cuales se adaptaron cinco sesiones en las siguientes páginas. Las sesiones 1, 2 y 3 se refieren a construir, memorizar y aplicar la tabla del 2 respectivamente. Se concluye con las sesiones 13 y 14. La sesión 13 tiene por objetivo que el alumno se entretenga descubriendo relaciones matemáticas vinculadas a las tablas del 2 al 5, y la sesión 14 que el alumno conjeture e identifique propiedades de estas tablas.



Las sesiones 4, 5 y 6 que corresponden a la tabla del 5; las sesiones 7, 8 y 9 que corresponden a la tabla del 3; y sesiones 10, 11 y 12 que corresponden a la tabla del 4, siguen el mismo formato que las sesiones 1, 2 y 3 correspondientes a la tabla del 2. Las sesiones 4 a 12 no fueron desarrolladas en este libro.

UNIDAD MULTIPLICACIÓN I: SUBUNIDAD 2. LAS TABLAS DEL 2 AL 5 (14 SESIONES)**Sesión 1:** Construyendo la tabla del 2.

Página 1 de 2

Objetivo de la Sesión: Que el alumno comprenda la construcción de la tabla del 2.**Pregunta Central:** ¿Cuáles son los productos de la tabla del 2?

Esperamos que el alumno elabore la tabla del 2 como una forma de disponer de manera expedita los resultados de la multiplicación de 2 por cualquier dígito.

Prof.: ¿Cuántos dulces hay en cada bolsa?, ¿Cuántos dulces hay en total?

Situación Problema: "Cada bolsa tiene dos dulces. ¿Cuántos dulces hay en total?"**Lámina en pizarra:**

Cantidad de bolsas

Expresión Producto

Cómo encuentra el producto



$2 \times 1 = 2$



$2 \times 2 = 4$



$2 \times 3 = 6$



$2 \times 4 = 8$

suma, conteo



$2 \times 5 =$



$2 \times 6 =$



$2 \times 7 =$



$2 \times 8 =$



$2 \times 9 =$

Alumnos responden.

Prof.: ¿Cómo lo calcularon? Escriban en su cuaderno la forma que emplearon para encontrar el producto.

Prof.: ¿Cuál es la forma matemática que expresa la relación entre estos números e indica el total?

Alumnos: "2 x 4"

Prof.: Bien, dibujen la tabla en su cuaderno y escriban los productos, la forma en que los calculan y la expresión matemática correspondiente, para una bolsa, luego dos y tres, hasta llegar a 4 bolsas.

Prof.: Comparen su respuesta con la de su compañero y comenten cómo calcularon. Pueden ir al banco de otro compañero también.

El profesor usa una lámina para plantear la situación.

Puntos importantes: Identificar los componentes del producto.

La idea es que los alumnos capten que son 2 dulces por bolsa (los elementos de cada grupo), y que la cantidad de grupos es el número de bolsas, 4 en la cuarta línea y en el problema planteado al alumno.

El profesor apoya a los alumnos que les es difícil imaginar la situación, preguntándoles por "el número que se repite" y el "número de veces" que se repite.

El profesor da tiempo para que los alumnos piensen en cómo resolvieron el problema y lo escriban.

Escribir la expresión matemática.

El profesor observa y apoya el trabajo individual de los alumnos.

El profesor da importancia a la comunicación tanto escrita como verbal. Los alumnos hablan con sus compañeros y los escuchan.

UNIDAD MULTIPLICACIÓN I: SUBUNIDAD 2. LAS TABLAS DEL 2 AL 5 (14 SESIONES)	
Sesión 1: Construyendo la tabla del 2.	Página 2 de 2
Objetivo de la Sesión: Que comprenda la construcción de la tabla del 2.	
<p>Prof.: Miren los productos 2×1 a 2×4 y piensen ¿Cuál será el producto de 2×5?</p> <p>A.: 10, porque el aumento es de dos en dos.</p> <p>Prof.: ¿Por qué de dos en dos?</p> <p>A.: Porque cada bolsa tiene 2 dulces.</p> <p>Prof.: Bien, ustedes piensan que la tabla seguirá aumentando de dos en dos. Por lo que predican que el resultado de 2×5 es 10. ¿Cómo averiguamos si ese resultado es correcto? ¿Qué hacían ustedes para encontrar el resultado?</p> <p>Prof.: Bien, ahora continúen completando la tabla, hasta llegar a 9 bolsas.</p> <p>Prof.: Leamos la tabla “dos por uno, dos”, “dos por dos, cuatro”. Ahora continúen ustedes.</p> <p>Alumnos: “dos por 3, seis”,...</p> <p>Prof.: Revisemos, ¿Qué propiedades tiene la tabla del 2? Mírenla ¿Qué les llama la atención?</p> <p>Alumno 1: Los productos de la tabla aumentan de dos en dos.</p> <p>Alumno 2: El resultado de una multiplicación es dos más que el resultado anterior.</p> <p>Alumno 3: Sumando dos a un resultado, obtenemos el siguiente resultado.</p> <p>Alumno 4: Los primeros números son 2, 4, 6 y 8. Luego son 12, 14, 16 y 18. Se repite el orden en que terminan los números.</p> <p>Alumno 5: Si el segundo factor aumenta en 1 el resultado en 2, en la cantidad del primer factor. Así que se puede reconstituir si uno la olvida.</p> <p>Prof. (cierre): Anoten en su cuaderno dos propiedades de la tabla del dos.</p>	<p>Comprobar la respuesta a la pregunta. Una vez que los alumnos corroboran sus respuestas con sus compañeros, el profesor les solicita atención para la búsqueda de una regularidad.</p> <p>Comprender la forma de aumento en el producto, para el caso de la tabla del 2.</p> <p>El profesor insiste en hacer pensar a los alumnos y les pide que argumenten sus respuestas.</p> <p>Identificar otras propiedades de la tabla del 2.</p> <p>El profesor hace que los alumnos lean, de modo que se concentren en la tabla.</p> <p>El profesor termina la clase dando la oportunidad de que los alumnos identifiquen características de la tabla del 2.</p> <p>El profesor da tarea para que los alumnos vayan memorizando la tabla del dos.</p>

UNIDAD MULTIPLICACIÓN I: SUBUNIDAD 2. LAS TABLAS DEL 2 AL 5 (14 SESIONES)	
Sesión 2: Memorizando la tabla del 2. Página 1 de 1	
Objetivo de las Sesiones: Que el alumno memorice la tabla del 2	
Pregunta Central: ¿Puede recordar la tabla del 2?	
Esperamos que el alumno avance en la memorización de la tabla del 2, desarrollando algunas estrategias para recordar algunos valores.	
<p>Primera actividad: Escribir y leer la tabla del 2</p> <p>Prof.: Repitamos la tabla con rapidez, dos por uno, dos; dos por dos, cuatro,... Vamos a leerla en orden inverso. Todos juntos: dos por nueve... (escribe la tabla en una lámina para ponerla en la pizarra).</p> <p>Prof.: Repetiremos la tabla, tamaré poco a poco los resultados (mientras pone un papel sobre el resultado de 2×1 en la lámina). 2×1...</p> <p>Alumnos repiten y completan las frases.</p> <p>Segunda actividad: Recitar la tabla, asociando los valores a imágenes</p> <p>Prof.: Repitamos la tabla, mirando la lámina con círculos (mientras repite, va destapando círculos).</p> <p>Los alumnos recitan la tabla del 2 sin verla, frente a la colección de parejas de círculos que va descubriendo el profesor.</p> <p>Tercera actividad: Hacer tarjetas de multiplicación y practicar con ellas.</p> <p>Prof.: Usaremos mis tarjetas para que entiendan, después usan las suyas. En una cara de la tarjeta está la operación y en la otra el producto. Las miramos por un lado y predecimos el otro. Primero en orden y luego dispuestas al azar. Practicamos individualmente y luego en parejas. También pueden practicar fuera de clases.</p> <p>Prof.: Vayan apartando las tarjetas que ya sepan.</p> <p>Cuarta actividad: Hacer hoja de registro de la memorización de la table.</p> <p>Prof.: Construirán la "hoja de registro de la memorización de la tabla". En ella registrarán las tablas que sepan al derecho, al revés y al azar. Firmo a un alumno tras interrogarlo, y quien recibe firma puede controlar a sus compañeros en esa tarea. Pongan su nombre en la hoja de la memorización. Veán con su compañero si ya saben la tabla del 2. Firmaré a quienes muestren ahora que ya saben la tabla, el resto practique.</p>	<p>La clase tiene el propósito de fijar un conocimiento, por ello consta de varias actividades y no se desarrola a partir de una situación problema.</p> <p>Puntos importantes: Memorizar la relación entre factores, producto, expresión oral, forma escrita y visualización.</p> <p>La regularidad de la tabla permite deducir un producto a partir del anterior o siguiente, lo que facilita la autoevaluación. Por lo que es útil aprender la secuencia.</p> <p>El profesor indica cómo usar las tarjetas y motiva su uso fuera de clases.</p> <p>La memorización lleva al resultado rápidamente, evitando la suma sucesiva que es externa y más demorosa.</p> <p>El profesor ofrece técnicas para memorizar y hace saber que la práctica ayuda a memorizar.</p> <p>Confirmación del estado de avance de la memorización de las tablas.</p> <p>El profesor anima el estudio, evitando la desmotivación a causa de una carga excesiva.</p>

UNIDAD MULTIPLICACIÓN I: SUBUNIDAD 2. LAS TABLAS DEL 2 AL 5 (14 SESIONES)	
Sesión 3: Aplicando la tabla del 2. Página 1 de 2	
Objetivo de las Sesiones: Que el alumno aplique la tabla del 2	
Pregunta Central: ¿Puede recordar la tabla del 2 y usarla en distintas situaciones? Esperamos que aplique la tabla en situaciones pertinentes.	
<p>Primera actividad: Resuelva ejercicios de multiplicación</p> <p>Prof.: Resuelvan los 9 ejercicios que aparecen en la página de "ejercicios y problemas" del texto.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Ejercicios:</p> <p>1. Resuelva los siguientes ejercicios.</p> <p>(1) $2 \times 8 =$ (2) $2 \times 2 =$ (3) $2 \times 5 =$ (4) $2 \times 9 =$ (5) $2 \times 3 =$ (6) $2 \times 6 =$ (7) $2 \times 7 =$ (8) $2 \times 4 =$ (9) $2 \times 1 =$</p> </div> <p>Prof. (Luego de dar suficiente tiempo y supervisar el trabajo de los alumnos en sus cuadernos): Van a salir 5 alumnos a la pizarra y revisaremos los 5 primeros ejercicios.</p> <p>Alumnos salen a la pizarra y cada uno escribe uno de los ejercicios. Luego el profesor y el curso verifican si hay errores.</p> <p>Prof. (al alumno que tuvo un error): ¿Cómo calculaste?...</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Ejercicios resueltos en la pizarra:</p> <p>(1) $2 \times 8 = 16$ OK (2) $2 \times 2 = 4$ OK (3) $2 \times 5 = 10$ OK (4) $2 \times 9 = 18$ (5) $2 \times 3 = 6$ OK $2 \times 9 = 2+2+2+2+2+2+2+2+2=18$</p> </div> <p>Alumno se da cuenta de su error y corrige.</p> <p>Segunda actividad: Resolver problemas de multiplicación que aparecen en el texto.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Problemas</p> <p>2. Resuelva los siguientes problemas.</p> <p>(1) Cada llavero tiene 2 llaves. Si hay 6 llaveros, ¿cuántas llaves hay en total?</p> <p>(2) Cada niño tiene 2 confites. Si hay 8 niños, ¿cuántos confites hay en total?</p> <p>(3) Hay 2 lápices en cada caja. María compró 1 caja. ¿Cuántos lápices tiene María?</p> </div>	<p>El profesor elige los ejercicios en el mismo orden en que vienen propuestos en el texto del alumno. El profesor escribe en la pizarra los mismos ejercicios.</p> <p>El profesor da tiempo para que los alumnos trabajen de manera individual en sus cuadernos con la posibilidad de que contrasten su avance con el de su compañero.</p> <p>La revisión de los ejercicios se hace de a uno, una vez que los cinco alumnos terminan de escribir en la pizarra las respuestas a los 5 primeros.</p> <p>Trabajo del error:</p> <p>Los errores no son borrados, sino que corregidos.</p> <p>El profesor decide atender un error de un alumno en público y aprovecha el error del alumno para que el curso aprecie donde hay dificultad (con el objeto de entender su modo de pensar).</p> <p>La segunda actividad de la clase se refiere a problemas.</p> <p>El profesor da suficiente tiempo para que todos los alumnos se involucren en los problemas. Pasa entre los bancos, observa el trabajo de los alumnos y apoya en esta etapa para darles seguridad.</p>

UNIDAD MULTIPLICACIÓN I: SUBUNIDAD 2. LAS TABLAS DEL 2 AL 5 (14 SESIONES)	
Sesión 3: Aplicando la tabla del 2.	Página 2 de 2
Objetivo de las Sesiones: Que el alumno aplique la tabla del 2.	
<p>Prof. (mientras los alumnos están en sus puestos resolviendo los problemas): Para resolver los problemas tienen que entender las frases. Si tienen dudas conversen con su compañero.</p> <p>Prof.: ¿Qué es lo primero que debemos hacer?</p> <p>Alumno: Buscamos cuál es la cantidad que se repite y las veces que se repite. Para luego multiplicar.</p> <p>Alumno: Primero planteamos el problema, decidimos cuál es la operación que usaremos para resolver el problema.</p> <p>Prof.: Bien, entonces qué hacemos primero ¿identificamos la operación o buscamos los números que participan en ella?</p> <p>Alumno: Yo leo y pienso en el número que se repite. Cuando encuentro el número, lo escribo y sé que es una multiplicación. Escribo "x", y luego escribo las veces que se repite el número.</p> <p>Prof.: ¿Cómo lo hacen ustedes? Conversen con su compañero y resuelvan. Escriban la expresión matemática o el planteo de la operación y escriban el resultado.</p> <p>Prof.: Ahora saldrá un alumno a la pizarra a mostrar cómo resolvió el primer problema.</p> <p>Alumno sale a la pizarra y resuelve el problema 1, anotando el proceso y el resultado de su trabajo.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Problema resuelto en la pizarra: $2 \times 5 = 10$, luego 2×6 es $10 + 2$ $10 + 2 = 12$ R: 12 llaves</p> </div> <p>Prof.: ¿Está bien la respuesta al primer problema?</p> <p>Alumno: Tengo otro resultado.</p> <p>Prof.: ¿Por qué piensas que es distinto? Muestra lo que hiciste...</p> <p>Prof. (Cierre): ¿Cómo va su aprendizaje de la tabla del 2? Están preparados para que les firme como prueba de que dominan la tabla en cualquier orden? ¿Quién desea ser interrogado?</p>	<p>El profesor procura darse cuenta si todos los alumnos entienden.</p> <p>El profesor ayuda a identificar el número que se repite y las veces que se repite, de modo que planteen la operación y luego determinen el producto.</p> <p>Los alumnos deben interpretar el significado de las frases y reconocer el uso de la multiplicación en el contexto.</p> <p>El profesor da 3 minutos para que interactúen y avancen.</p> <p>Para la corrección de los problemas, primero sale un alumno a hacer el primer problema.</p> <p>Alumnos escriben los pasos, uno a uno en la pizarra. Sus compañeros opinan desde sus puestos.</p> <p>Los tres problemas son revisados en público, uno a uno.</p> <p>Quedando 5 minutos, el profesor desafía a controlar el estado de la memorización. Primero individualmente y luego en grupo, generando un ambiente lúdico y auto competitivo.</p>

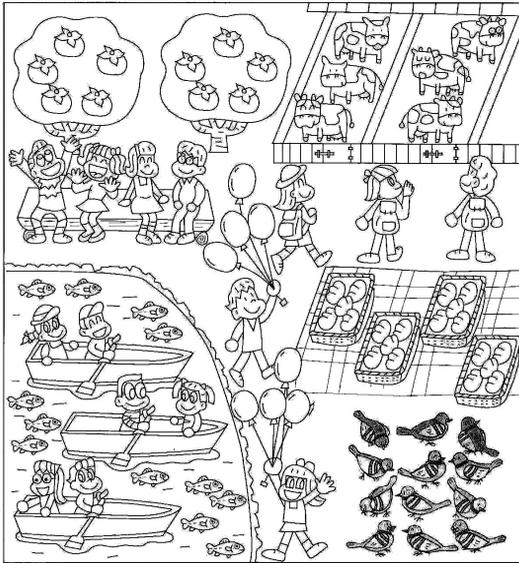
Nota. Nos saltamos de la sesión 4 a la 12 por ser similares a las sesiones 1, 2 y 3.

UNIDAD MULTIPLICACIÓN I: SUBUNIDAD 2. LAS TABLAS DEL 2 AL 5 (14 SESIONES)**Sesión 13:** Entreteniéndonos con las tablas del 2 al 5.

Página 1 de 2

Objetivo de la Sesión: Que el alumno se entretenga usando las tabla del 2 al 5.**Pregunta Central:** ¿Siente gusto por trabajar en clases de matemáticas el alumno? ¿Le gusta la aritmética?

Esperamos que el alumno se entretenga descubriendo relaciones matemáticas, pues es importante que el alumno aprenda la matemática divirtiéndose, sienta que es agradable y desee seguir aprendiendo.

Primera actividad: Buscando la multiplicación.

Prof.: Busquen las circunstancias en donde se puede aplicar la multiplicación.

Prof.: ¿Qué hay respecto a las golondrinas?

Alumno1: Hay 4 filas de 3 golondrinas.

Alumno2: Hay tres hileras para abajo de cuatro golondrinas.

Profesor: Hay casos donde el planteamiento de la operación dependerá de cómo se observe la situación. Ello depende de cómo se hagan las agrupaciones y cuántos objetos se consideren en cada grupo.

Prof.: ¿Han mirado las boletas de los supermercados? Si un escobillón cuesta 1 billete de mil pesos (\$ 1.000) y la mamá compra dos escobillones, en la boleta aparece "1.000 x 2 = 2.000" ¿Qué indica el número 2? ¿Es el multiplicador?

El profesor profundiza sobre las situaciones en que se puede encontrar la multiplicación. Entrega a los alumnos una fotocopia de una lámina con una ilustración.

La ilustración muestra situaciones donde se puede identificar distintos planteamientos de la multiplicación en una misma situación. Por ejemplo, se puede decir que la cantidad de golondrinas es 3×4 o también 4×3 .

El profesor puede aprovechar la situación para explicar que hay dos formas de entender 3×4 , como "3 veces 4", o bien "el 3, cuatro veces".

Nota. En Japón se interpreta como "el 3, 4 veces".

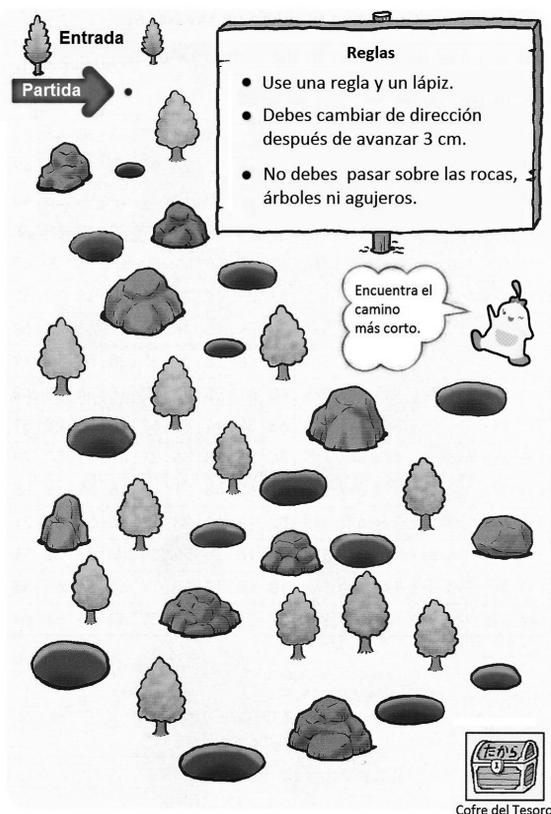
El profesor cierra la clase haciendo notar que hay distintas formas de agrupar y que hay distintas formas de registrar las agrupaciones.

UNIDAD MULTIPLICACIÓN I: SUBUNIDAD 2. LAS TABLAS DEL 2 AL 5 (14 SESIONES)**Sesión 13:** Entreteniéndonos con las tablas del 2 al 5.

Página 2 de 2

Objetivo de la Sesión: Que el alumno se entretenga usando las tabla del 2 al 5.**Pregunta Central:** ¿Siente gusto por trabajar en clases de matemáticas el alumno?
¿Le gusta la aritmética?**Segunda actividad:** Buscando la ruta más corta para llegar al cofre con el tesoro

Prof.: Construyan en la lámina el camino al cofre del tesoro siguiendo las reglas del juego. Luego comparen con sus compañeros para ver quien encontró el camino más corto para llegar al tesoro, siguiendo las reglas.



El profesor entrega a cada alumno una fotocopia con una ilustración en la que aparece una planicie con obstáculos para llegar al tesoro.

Para evitar que los alumnos se equivoquen, el profesor puede pedir a los alumnos que expliquen las reglas del juego antes de comenzar a jugar.

Es preferible que los alumnos expliquen las reglas y no el profesor. El profesor debe dar tiempo para que los alumnos piensen. Es posible que los alumnos lleguen en 5 ó 4 movimientos al cofre del tesoro. Sin embargo, deben cautelar entre ellos el cumplimiento de las reglas del juego.

UNIDAD MULTIPLICACIÓN I: SUBUNIDAD 2. LAS TABLAS DEL 2 AL 5 (14 SESIONES)

Sesión 14: Descubriendo propiedades en las tablas del 2 al 5.

Página 1 de 1

Objetivo de las Sesiones: Que el alumno conjeture e identifique propiedades de las tablas del 2 al 5.

Pregunta Central: ¿Puede indicar alguna propiedad de la tabla?

Esperamos que el alumno conjeture e identifique propiedades de las tablas del 2 al 5.

Primera situación.

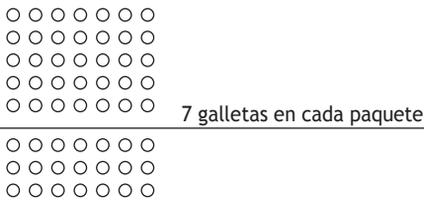
Prof.: Completa la tabla. Luego, observa los números de la tabla ¿Qué te llama la atención?

Situación Problema: ¿Qué propiedades de la tabla se observan a partir de las representaciones dadas?

Multiplicando	Multiplicador			
	2	3	4	5
Fila de 2			8	
Fila de 3				
Fila de 4				20
Fila de 5				

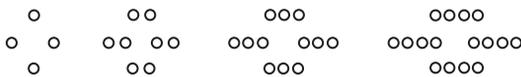
Segunda situación.

Prof.: No sabemos la tabla del 7 ni del 8. Tenemos 8 paquetes con 7 galletas cada uno. Calcula lo más rápido que puedas el total de galletas.



Prof.: Explica a tu compañero cómo lo hiciste y que él también te explique. Compara tu forma de resolver con la de tu compañero. Escribe en tu cuaderno tu forma de encontrar el resultado y la de tu compañero.

Prof.: Abajo hay 4 figuras, ¿Puedes dibujar otra siguiendo las formas? ¿Cuántos círculos más tiene cada figura siguiente? ¿Podemos asociar alguna propiedad de la multiplicación a esta secuencia?



Prof.: (Cierre) Revisemos.
 Cuántas propiedades descubrieron hoy...

El profesor podría esperar que los alumnos se den cuenta de la conmutatividad, a partir de la simetría de los productos con respecto a una diagonal.

Los alumnos pueden darse cuenta que algunos números se repiten, por ejemplo, 12. También se pueden dar cuenta que los múltiplos de 5 terminan en 0 ó 5.

Ante la segunda situación, podrían hacer cálculos parciales y sumarlos. Si las agrupaciones contemplan grupos de igual cantidad de galletas, podrán usar la multiplicación y la propiedad distributiva.

Desde el tercer problema pueden descubrir que al avanzar de una figura a otra, el total de círculos aumenta en 4, lo que es un invariante en la tabla por fila y columna.

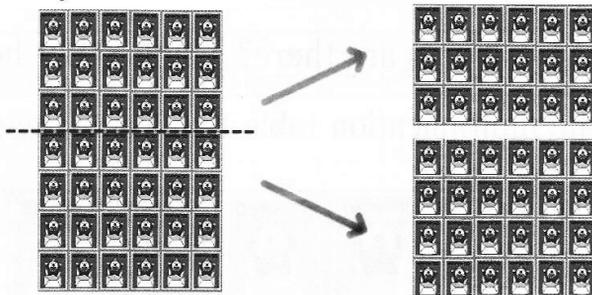
El profesor da tiempo para que los alumnos conjeturen, identifiquen y comenten las propiedades.

- Usemos las tablas de multiplicar ya estudiadas

¿Cuántas estampillas hay? Piensa cómo podrías usar las tablas de multiplicar que ya has estudiado.

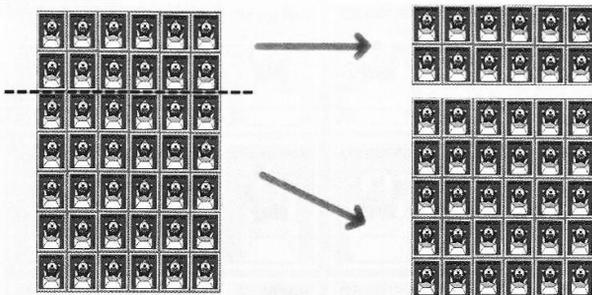
La idea de Juan José

Separo la hoja cerca del centro



Sumo los resultados de 3×6 y de 4×6 y obtengo ...

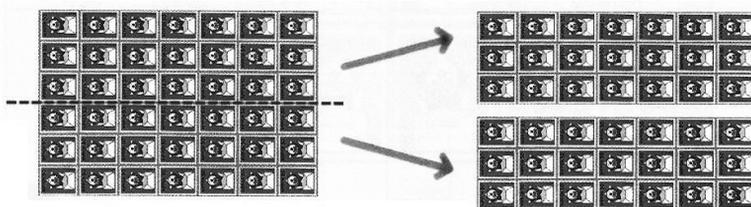
La idea de Trinidad



Sumo los resultados de 2×6 y el resultado de 5×6 y obtengo ...

La idea de Sol Jesús

Miro la figura de lado y separo la hoja en el centro.



El resultado es 2 veces 3×7 , luego obtengo ...

A continuación se presentan planes de clases para las tablas del 6 al 9, y luego la multiplicación por 1. Además se presentan orientaciones para el estudio de las propiedades de la tabla completa.

- Para multiplicar por 6 ó más

Siguiendo los contenidos de la subunidad "Las tablas del 2 al 5", el punto de esta Subunidad es que los niños construyan por sí mismos las tablas de multiplicar del 6 al 9 aplicando el método de la construcción de la tabla de multiplicación antes aplicado. A partir de la construcción de la tabla del 6 se utiliza el dibujo de la colección de pelota para que los alumnos se alejen poco a poco de los materiales concretos y puedan pensar con los dibujos abstractos. En las tablas del 8 y del 9 los niños y las niñas construirán las tablas observando la relación entre el multiplicador y el producto.

En la construcción de las tablas el foco está puesto en la propiedad "si el multiplicador aumenta en uno, el producto aumenta en el valor del multiplicando". En las tablas del 2 al 5 el énfasis estaba puesto en que era posible determinar el producto sumando cantidades sucesivas o bien contando. En esta etapa tales estrategias son muy engorrosas, por lo que el énfasis está en encontrar un producto a partir del anterior. Por ello, los alumnos deben analizar la forma en que aumenta el producto. La pregunta central es "Cuando aumenta en 1 el multiplicador, ¿cuánto aumenta el producto?"

Frente a la dificultad citada, de sumar varias veces un mismo número "grande", como lo serían el 6, 7, 8 ó 9, es un punto de interés destacar la ventaja de la multiplicación sobre la suma frente a los cálculos. Durante el desarrollo de las actividades los niños y las niñas han de sentir la ventaja o la conveniencia de notar la forma característica en qué aumentan los valores en la tabla.

Por ejemplo, se puede calcular fácilmente o se puede encontrar el producto fácilmente, siguiendo la regla que caracteriza a cada tabla de multiplicar.

Las características propias del avance en matemáticas de cada curso, escuela y docente harán que emerjan adecuaciones a las proposiciones de secuencias de enseñanza. Un tema importante es la inclusión de cantidades continuas. En algún momento conviene iniciar el tratamiento de las cantidades continuas.

A partir de la tabla del seis, sino antes, pueden aparecer cantidades continuas en los problemas. Por ejemplo, kilogramos y centímetros. Si hay niños y niñas

que demuestran dificultades en el uso de estas unidades de medida, dar la orientación individual o grupal mostrando la situación del problema con objetos concretos para que ellos capten que si se puede aplicar la multiplicación en cada una de estas situaciones.

- Planificación de la Subunidad “Las tablas del 6 al 9”

Las siguientes páginas presentan una adaptación de los planes de clases referidos a la enseñanza de las tablas del 6 al 9 en el marco del Proyecto PROMETAM y de las estrategias usadas en el texto de Editorial Gakkoh Toshō.

La subunidad “las tablas del 6 al 9” contiene un total de 14 sesiones, de las cuales se adaptaron tres sesiones en las siguientes páginas. Las sesiones 1, 2 y 3 se refieren a construir, memorizar y aplicar la tabla del 6 respectivamente.

Se concluye con las sesiones 13 y 14. La sesión 13 tiene por objetivo que el alumno ejercite y aplique las tablas del 6 al 9, y la sesión 14 que el alumno se entretenga descubriendo relaciones matemáticas vinculadas a estas tablas.

Las sesiones 4, 5 y 6 tienen por objetivo construir, memorizar y aplicar la tabla del 7. Las sesiones 7, 8 y 9 tienen por objetivo construir, memorizar y aplicar la tabla del 8. Las sesiones 10, 11 y 12 tienen por objetivo construir, memorizar y aplicar la tabla del 9; y siguen el mismo formato que las sesiones 1, 2 y 3 correspondientes a la tabla del 6. Las sesiones 4 a 12 no fueron desarrolladas en este libro.

UNIDAD MULTIPLICACIÓN I: SUBUNIDAD 3. LAS TABLAS DEL 6 AL 9 (14 SESIONES) Sesión 1: Construyendo la tabla del 6. Página 1 de 2 Objetivo de la Sesión: Que el alumno comprenda la construcción de la tabla del 6. Pregunta Central: ¿Cuáles son los productos de la tabla del 6? Esperamos que el alumno elabore la tabla del 6 como una forma expedita de disponer los resultados de la multiplicación de 6 por cualquier dígito.																																																							
<p>Situación Problema: "Cada plato tiene seis pasteles. Hay 4 platos. ¿Cuántos pasteles hay en total?</p> <p>Prof. (ubica la lámina en la pizarra): ¿Cuál es el número de pasteles en cada plato?, ¿Cuál es la cantidad de platos?, ¿Cuántos pasteles hay en total?</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Lámina en pizarra: Cada plato tiene 6 pasteles. Hay 4 platos. ¿Cuántos pasteles hay en total?</p> <p style="text-align: center;">\ooooo/ \ooooo/ \ooooo/ \ooooo/</p> </div> <p>Alumno: Hay 6 pasteles en cada plato y son 4 platos. Prof.: ¿Cuál es la operación que planteamos para determinar el número total de pasteles?</p> <p>Alumno: La multiplicación. 6×4.</p> <p>Prof.: Diga ¿cuál es el total de pasteles? y ¿cómo lo supo?</p> <p>Alumno: es 24,... (explica en la pizarra cómo lo resolvió).</p> <p>Prof. (Fija la lámina): Construiremos la tabla del 6.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Esquema en pizarra:</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: left;">Cantidad de platos</th> <th style="text-align: left;">Expresión Producto</th> <th style="text-align: left;">Cómo lo encuentra</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>\888/</td> <td>$6 \times 1 = 6$</td> <td>cuenta</td> </tr> <tr> <td>\888/ \888/</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>\888/ \888/ \888/</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>\888/ \888/ \888/ \888/</td> <td></td> <td>suma, conteo...</td> </tr> <tr> <td>\888/ \888/ \888/ \888/ \888/</td> <td></td> <td>estrategia...</td> </tr> <tr><td colspan="3"><hr/></td></tr> <tr> <td>\888/</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>\888/ \888/ \888/ \888/ \888/</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr><td colspan="3"><hr/></td></tr> <tr> <td>\888/ \888/</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>\888/ \888/ \888/ \888/ \888/</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr><td colspan="3"><hr/></td></tr> <tr> <td>\888/ \888/ \888/</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>\888/ \888/ \888/ \888/ \888/</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr><td colspan="3"><hr/></td></tr> <tr> <td>\888/ \888/ \888/ \888/</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>\888/ \888/ \888/ \888/ \888/</td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> </div>	Cantidad de platos	Expresión Producto	Cómo lo encuentra	\888/	$6 \times 1 = 6$	cuenta	\888/ \888/			\888/ \888/ \888/			\888/ \888/ \888/ \888/		suma, conteo...	\888/ \888/ \888/ \888/ \888/		estrategia...	<hr/>			\888/			\888/ \888/ \888/ \888/ \888/			<hr/>			\888/ \888/			\888/ \888/ \888/ \888/ \888/			<hr/>			\888/ \888/ \888/			\888/ \888/ \888/ \888/ \888/			<hr/>			\888/ \888/ \888/ \888/			\888/ \888/ \888/ \888/ \888/			<p>El profesor presenta la actividad en base a una lámina.</p> <p>Identificar los componentes del producto:</p> <p>Hace leer el problema a los alumnos para que identifiquen que la cantidad en cada grupo es 6 pasteles y que la cantidad de grupos (platos) es 4.</p> <p>Escribir la expresión matemática:</p> <p>Los alumnos identifican los números correspondientes y plantean la operación.</p> <p>Resolver y pensar en cómo lo calcula:</p> <p>Los alumnos llegan al resultado, teniendo el dibujo delante y usando estrategias propias.</p> <p>Construir tabla del 6:</p> <p>Los alumnos comienzan completando 6×3 y describen la forma en que llegan al producto. Luego escriben el resultado.</p>
Cantidad de platos	Expresión Producto	Cómo lo encuentra																																																					
\888/	$6 \times 1 = 6$	cuenta																																																					
\888/ \888/																																																							
\888/ \888/ \888/																																																							
\888/ \888/ \888/ \888/		suma, conteo...																																																					
\888/ \888/ \888/ \888/ \888/		estrategia...																																																					
<hr/>																																																							
\888/																																																							
\888/ \888/ \888/ \888/ \888/																																																							
<hr/>																																																							
\888/ \888/																																																							
\888/ \888/ \888/ \888/ \888/																																																							
<hr/>																																																							
\888/ \888/ \888/																																																							
\888/ \888/ \888/ \888/ \888/																																																							
<hr/>																																																							
\888/ \888/ \888/ \888/																																																							
\888/ \888/ \888/ \888/ \888/																																																							

UNIDAD MULTIPLICACIÓN I: SUBUNIDAD 3. LAS TABLAS DEL 6 AL 9 (14 SESIONES)	
Sesión 1: Construyendo la tabla del 6.	Página 2 de 2
Objetivo de la Sesión: Que comprenda la construcción de la tabla del 6.	
<p>Prof.: Bien, dibujen la tabla en su cuaderno y escriban los productos, la forma en que los calculan y la expresión matemática para un plato, luego para dos, tres y cuatro platos con pasteles.</p> <p>Prof. (tras unos minutos): ¿Cómo lo calcularon? Escriban en su cuaderno la forma que emplearon para encontrar el producto.</p> <p>Prof.: ¿Cómo encontraron el producto 6×3?</p> <p>Alumno: Lo encontré sumando tres veces el 6.</p> <p>Alumno: Al producto anterior 6×2, que es 12, le sumé 6. Es más rápido que la forma "$6 + 6 + 6$".</p> <p>Prof.: Lean la tabla del 6, hasta el 4. Miren los productos 6×1 a 6×4 y piensen ¿Cuál será el producto de 6×5?</p> <p>Alumno: 30, porque el aumento es de seis en seis.</p> <p>Prof.: ¿Por qué aumenta en seis? Recuerden, ¿Cuánto va aumentando la tabla del 5?</p> <p>Alumno: Aumenta de 5 en 5.</p> <p>Prof.: ¿De qué depende que el aumento sea 5 ó 6? (El profesor intenta que los alumnos descubran que el aumento en 1 del multiplicador lleva al aumento en 6 del producto).</p> <p>Prof. Ahora completen la tabla, hasta llegar a 9.</p> <p>Prof. (después de dos minutos): Revisemos, ¿Qué propiedades tiene la tabla del 6? Miren la tabla ¿Qué les llama la atención en ella?</p> <p>Alumno 1: Si el segundo factor aumenta en 1, el resultado en 6, en la cantidad del primer factor. Así podemos hallar los números que falten si los olvidamos y se puede verificar si hay error.</p> <p>Alumno 2: Los primeros números terminan en 6, 2, 8, 4, 0, y luego se repite el orden.</p> <p>Prof. (cierre): Anoten en su cuaderno las propiedades de la tabla.</p>	<p>Identificar la forma de aumento en el producto, en el caso de la tabla del 6:</p> <p>El profesor intenta que algún alumno señale que es posible encontrar el producto 6×3 a partir del anterior, cuestión que ya fue tratada en la construcción de las tablas anteriores.</p> <p>En esta etapa, los alumnos ya saben que la tabla se caracteriza por el hecho de que cada resultado es 6 unidades más que el anterior resultado. Esto es, que se requiere sumar 6 para llegar al siguiente producto.</p> <p>En esta clase, los alumnos analizan la tabla desde el punto de vista de la relación entre el multiplicador y el producto.</p> <p>El profesor debiera intentar que los alumnos verbalicen que en la tabla del 6, cuando el multiplicador aumenta en 1, el producto aumenta 6.</p> <p>Identificar otras propiedades de la tabla del 6:</p> <p>El profesor hace leer a los alumnos, de modo que se concentren en la tabla.</p> <p>El profesor termina la clase pidiendo anotar las propiedades de la tabla del 6 en el cuaderno.</p>

UNIDAD MULTIPLICACIÓN I: SUBUNIDAD 3. LAS TABLAS DEL 6 AL 9 (14 SESIONES) Sesión 2: Memorizando la tabla del 6. Página 1 de 1 Objetivo de las Sesiones: Que el alumno memorice la tabla del 6. Pregunta Central: ¿Puede recordar la tabla del 6? Esperamos que el alumno avance en la memorización de la tabla del 6, y desarrolle estrategias para recordar todos los valores.	
<p>Primera actividad: Escribir y leer la tabla del 6.</p> <p>Prof.: Repitamos la tabla con rapidez, seis por uno, seis; seis por dos, doce,... Vamos a leerla en orden inverso. Todos juntos: seis por nueve... (escribe la tabla en una lámina o en la pizarra).</p> <p>Prof.: Volveremos a repetir la tabla, destapando poco a poco los resultados (mientras pone un papel sobre el resultado de 6×1 en la lámina).</p> <p>Alumnos repiten y completan las frases que inicia el profesor.</p> <p>Segunda actividad: Recitar la tabla, asociando los valores a imágenes.</p> <p>Prof.: Volvamos a repetir la tabla, mirando ahora la lámina con círculos (mientras repite, destapa los círculos de la lámina).</p> <p>Los alumnos recitan la tabla del 6 sin verla, frente a la colección de círculos que va descubriendo el profesor.</p> <p>Tercera actividad: Hacer tarjetas de multiplicación y practicar con ellas.</p> <p>Prof.: Vamos a hacer tarjetas para la tabla del seis. En una cara de la tarjeta ponemos la operación y en la otra el producto. Practicamos primero con las tarjetas en orden y luego dispuestas al azar. Practicamos de manera individual y luego en parejas. Ustedes también practiquen fuera del horario de clases.</p> <p>Prof.: Ejerciten sólo los productos que no saben .</p> <p>Cuarta actividad: Usar hoja de memorización para llevar registro del avance en la memorización de las tablas.</p> <p>Prof.: Usaremos la hoja de registro de avance de la memorización de la tabla. Firmaré ahora a quienes hayan aprendido la tabla del 6. Quienes reciban firma podrán controlar el avance de un compañero. Escriban su nombre en la hoja y revisen con su compañero si saben la tabla del 6 al derecho y al revés.</p> <p>Prof.: Pónganse de pie y reciten en voz baja la tabla cuando yo lo indique. Al terminar se sientan.</p>	<p>La clase tiene el propósito de fijar un conocimiento, por ello consta de varias actividades y no se desarrolla a partir de una situación problema.</p> <p>Memorizar la relación entre factores, producto, expresión oral, forma escrita e imágenes visuales:</p> <p>La regularidad de la tabla permite deducir un producto a partir del anterior o siguiente, lo que facilita la verificación y la memorización.</p> <p>El profesor motiva al uso de tarjetas fuera de clases.</p> <p>La memorización es útil para evitar la suma iterada que es extensa y más demorosa:</p> <p>El profesor ofrece técnicas que facilitan la memorización y hace saber que la práctica ayuda a memorizar.</p> <p>Confirmación del estado de avance de la memorización de la tabla:</p> <p>El profesor debe procurar animarlos al estudio, evitando desmotivarlos con una carga excesiva.</p> <p>El profesor controla el tiempo y toma nota de los alumnos más lentos, con el objeto de motivarlos a superarse.</p>

UNIDAD MULTIPLICACIÓN I: SUBUNIDAD 3. LAS TABLAS DEL 6 AL 9 (14 SESIONES)	
Sesión 3: Aplicando la tabla del 6. Página 1 de 2	
Objetivo de las Sesiones: Que el alumno aplique la tabla del 6.	
Pregunta Central: ¿Puede recordar la tabla del 6 y usarla en distintas situaciones? Esperamos que el alumno aplique la tabla del 6 en situaciones pertinentes.	
<p>Primera actividad: Resolver ejercicios de multiplicación.</p> <p>Prof.: Resuelvan los 9 ejercicios que aparecen en la página de "ejercicios y problemas" del texto.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Ejercicios:</p> <p>1. Resuelva los siguientes ejercicios.</p> <p>(1) $6 \times 6 =$ (2) $6 \times 3 =$ (3) $6 \times 5 =$ (4) $6 \times 7 =$ (5) $6 \times 2 =$ (6) $6 \times 9 =$ (7) $6 \times 1 =$ (8) $6 \times 4 =$ (9) $6 \times 8 =$</p> </div> <p>Prof. (Luego de dar suficiente tiempo y apoyar el trabajo en los puestos): Van a salir 5 alumnos a la pizarra y revisaremos los 5 primeros ejercicios.</p> <p>Los 5 alumnos van a la pizarra y cada uno escribe uno de los ejercicios. Luego el profesor y el curso verifican si hay errores.</p> <p>Prof. (al alumno que cometió un error): ¿Cómo calculaste?</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Ejercicios resueltos en la pizarra:</p> <p>(1) $6 \times 6 = 6$ OK (2) $6 \times 3 = 18$ OK (3) $6 \times 5 = 30$ OK (4) $6 \times 7 = (43)$ ERROR (5) $6 \times 2 = 12$ OK</p> </div> <p>Alumno: Al producto de 6×6 le sume 7. Profesor: ¿Por qué sumaste 7?</p> <p>Alumno (se da cuenta del error y corrige): Ah, es 6 una vez más, ya que tengo "seis veces seis, más otra vez seis. De modo que tengo 7 veces seis".</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Ejercicio corregido en la pizarra:</p> <p>(4) $6 \times 7 = (43)$ ERROR (5)..... OK $6 \times 7 (=) 6 \times 6 + 7 = 43$ (error en el planteo) $6 \times 7 = 6 \times 6 + 6 = 42$ Cálculo correcto: $6 \times 7 = 42$ OK</p> </div>	<p>Evaluar el nivel de memorización de la tabla del 6:</p> <p>El profesor elige los ejercicios en el orden que los propuso.</p> <p>El profesor da tiempo para el trabajo individual en los cuadernos y dé la posibilidad de que comparen entre sí.</p> <p>Se revisa en una puesta en común uno a uno los ejercicios, una vez que los cinco alumnos terminan de escribir sus respuestas en la pizarra.</p> <p>No borra los errores de la pizarra, sino que son corregidos en ella.</p> <p>Importa que los niños sientan la ventaja de no sumar desde el principio y de aplicar las propiedades de la tabla de multiplicar.</p> <p>Se dan cuenta, por ejemplo, que pueden calcular el producto fácilmente si utilizan la regularidad con la que aumenta el producto, siempre conforme al multiplicador.</p>

UNIDAD MULTIPLICACIÓN I: SUBUNIDAD 3. LAS TABLAS DEL 6 AL 9 (14 SESIONES)	
Sesión 3: Aplicando la tabla del 6.	Página 2 de 2
Objetivo de la sesión: Que el alumno aplique la tabla del 6.	
<p>Segunda actividad: Resolver problemas de multiplicación.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Problemas Resuelva los siguientes problemas:</p> <ol style="list-style-type: none"> Hay 3 cajas. En cada caja hay 6 lápices. ¿Cuántos lápices hay en total? 6 manzanas medianas pesan un kilo. ¿Cuántas manzanas hay en 7 kilogramos de manzanas medianas? En cada auto van 6 personas. ¿Cuántas personas van en 8 autos? Hay 4 cajas de 6 centímetros de alto cada una. Las cajas están puestas una sobre otra. ¿Cuál es la altura total de las 4 cajas? </div> <p>Prof.: Revisemos las soluciones a los problemas.</p> <p>Alumno: Yo explico el problema 1. Primero planteo la operación (escribe) "$6 \times 3 = 18$". La respuesta es "En total hay 18 lápices".</p> <p>Prof.: ¿Cómo obtuviste el 18?</p> <p>Alumno: Sé de memoria la tabla. 6×3 es 18.</p> <p>Prof.: ¿Quién explica como resolvió el segundo?</p> <p>Tercera actividad: Inventar un problema de multiplicación.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Problema Invente un problema cuyo planteamiento use una multiplicación de la tabla del 6 y resuélvalo.</p> </div> <p>Un alumno muestra el problema a sus compañeros el problema que inventó, y el proceso de resolución.</p> <p>Cuarta actividad: Evaluar el avance en la memorización de la tabla del 6.</p> <p>Prof.: Voy a revisar cómo avanzan en memorizar las tablas. Revisaré la tabla del 6. De esta fila, ¿quién desea comprobar si ya aprendió la tabla del 6 de arriba a abajo y viceversa? (tras examinar a dos alumnos). Los alumnos que aprendieron la tabla, pueden examinar a sus compañeros.</p>	<p>A partir del estudio de la tabla del 6 el profesor propone problemas en que aparecen cantidades continuas en los problemas. Hace uso de unidades de medida que los alumnos entiendan, por ejemplo, litros, kilogramos y centímetros.</p> <p>Si los alumnos muestran dificultades en el uso de las magnitudes o sus unidades de medida, conviene apoyarlos mostrando la situación del problema con objetos concretos para que ellos capten que se puede aplicar la multiplicación en cada situación.</p> <p>El profesor dedica tiempo para trabajar en detalle los problemas 2 y 4, puesto que se refieren a cantidades continuas.</p> <p>Es importante que los alumnos compartan las soluciones, en especial la variedad de representaciones y situaciones.</p> <p>El profesor destina los 5 últimos minutos de la clase a desafiar la memorización.</p> <p>Los alumnos disponen de una libreta en la que se registra su avance en el dominio de las tablas. El profesor, apoderado o un compañero que ya domina la tabla firma en la libreta como ministro de fe del avance del alumno.</p>

UNIDAD MULTIPLICACIÓN I: SUBUNIDAD 3. LAS TABLAS DEL 6 AL 9		(14 SESIONES)																				
Sesión 13: Ejercitando y aplicando las tablas del 6 al 9.		Página 1 de 2																				
Objetivo de la Sesión: Que el alumno resuelva ejercicios y problemas en que aplique las tablas del 6 al 9.																						
Pregunta Central: ¿Recuerda las tablas del 6 al 9 y es capaz de usarlas para resolver problemas? Esperamos que aplique las tablas del 6 al 9 al resolver ejercicios y problemas.																						
<p>Primera actividad: Resolver las multiplicaciones.</p> <p>Prof.: Resuelvan los 21 ejercicios de la lista.</p>		<p>El profesor da tiempo para el trabajo individual en torno a los 7 primeros ejercicios. Recorre la sala y detecta errores más recurrentes en los niños. Una vez que gran parte del curso termina, elige a siete alumnos para que escriban las respuestas, todos a la vez. Luego, pide al curso que opine, sin borrar los errores, sino marcándolos y corrigiéndolos.</p> <p>De manera análoga continúa con el resto.</p> <p>En el segundo grupo de ejercicios, el objetivo es que el alumno encuentre la operación.</p> <p>El profesor apoya a los alumnos que tienen mayor dificultad. Les dice que repasen diariamente las tablas y que usen las tarjetas.</p> <p>El profesor da tiempo para que todos terminen los ejercicios e incentiva a que comparen los resultados.</p>																				
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>1. Ejercicio Resuelva los siguientes ejercicios:</p> <table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td>(1) $6 \times 6 =$</td> <td>(2) $9 \times 5 =$</td> <td>(3) $7 \times 9 =$</td> </tr> <tr> <td>(4) $8 \times 8 =$</td> <td>(5) $6 \times 8 =$</td> <td>(6) $7 \times 7 =$</td> </tr> <tr> <td>(7) $9 \times 7 =$</td> <td>(8) $8 \times 7 =$</td> <td>(9) $8 \times 9 =$</td> </tr> <tr> <td>(10) $7 \times 5 =$</td> <td>(11) $6 \times 7 =$</td> <td>(12) $9 \times 6 =$</td> </tr> <tr> <td>(13) $6 \times 5 =$</td> <td>(14) $8 \times 6 =$</td> <td>(15) $7 \times 6 =$</td> </tr> <tr> <td>(16) $9 \times 9 =$</td> <td>(17) $9 \times 8 =$</td> <td>(18) $7 \times 8 =$</td> </tr> <tr> <td>(19) $8 \times 5 =$</td> <td>(20) $6 \times 9 =$</td> <td>(21) $9 \times 4 =$</td> </tr> </table> </div> <p>Prof.: Cada uno de los 7 alumnos de esta fila escribe una respuesta (luego) ¿Alguien tiene alguna duda?</p> <p>Alumno: Tengo otro resultado en el número 6. $6 \times 8 = 56$.</p> <p>Prof.: ¿Cómo lo calculaste?</p> <p>Alumno: (reforzando su error) Lo memoricé.</p> <p>Prof.: Comprueba, ¿Cuánto más que 6×8 es 6×9?</p> <p>Alumno: 6 más. Entonces,... Ah, me confundí.</p>			(1) $6 \times 6 =$	(2) $9 \times 5 =$	(3) $7 \times 9 =$	(4) $8 \times 8 =$	(5) $6 \times 8 =$	(6) $7 \times 7 =$	(7) $9 \times 7 =$	(8) $8 \times 7 =$	(9) $8 \times 9 =$	(10) $7 \times 5 =$	(11) $6 \times 7 =$	(12) $9 \times 6 =$	(13) $6 \times 5 =$	(14) $8 \times 6 =$	(15) $7 \times 6 =$	(16) $9 \times 9 =$	(17) $9 \times 8 =$	(18) $7 \times 8 =$	(19) $8 \times 5 =$	(20) $6 \times 9 =$
(1) $6 \times 6 =$	(2) $9 \times 5 =$	(3) $7 \times 9 =$																				
(4) $8 \times 8 =$	(5) $6 \times 8 =$	(6) $7 \times 7 =$																				
(7) $9 \times 7 =$	(8) $8 \times 7 =$	(9) $8 \times 9 =$																				
(10) $7 \times 5 =$	(11) $6 \times 7 =$	(12) $9 \times 6 =$																				
(13) $6 \times 5 =$	(14) $8 \times 6 =$	(15) $7 \times 6 =$																				
(16) $9 \times 9 =$	(17) $9 \times 8 =$	(18) $7 \times 8 =$																				
(19) $8 \times 5 =$	(20) $6 \times 9 =$	(21) $9 \times 4 =$																				
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>2. Ejercicio Encuentra con qué multiplicación resulta el producto indicado en cada tabla.</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th>Tabla del 6</th> <th>Tabla del 7</th> <th>Tabla del 8</th> <th>Tabla del 9</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2</td> <td>21</td> <td>72</td> <td>63</td> </tr> <tr> <td>54</td> <td>56</td> <td>32</td> <td>36</td> </tr> <tr> <td>42</td> <td>28</td> <td>48</td> <td>45</td> </tr> </tbody> </table> </div> <p>Prof.: Ahora harán los 8 primeros ejercicios del segundo grupo. Pueden continuar si los terminan. Encuentren el multiplicador y el multiplicando, y escriban la operación usando las tablas del 6 al 9. En la primera columna ¿Cuál es la operación para 24?</p> <p>Alumnos: 6×4.</p> <p>Prof.: Bien, trabajen individualmente (recorre la sala).</p>		Tabla del 6	Tabla del 7	Tabla del 8	Tabla del 9	2	21	72	63	54	56	32	36	42	28	48	45					
Tabla del 6	Tabla del 7	Tabla del 8	Tabla del 9																			
2	21	72	63																			
54	56	32	36																			
42	28	48	45																			

UNIDAD MULTIPLICACIÓN I : SUBUNIDAD 3. LAS TABLAS DEL 6 AL 9 (14 SESIONES)

Sesión 13: Ejercitando y aplicando las tablas del 6 al 9.

Página 2 de 2

Objetivo de la Sesión: Que el alumno se entretenga usando la tabla del 6 al 9.

Segunda actividad:
Resolver problemas de multiplicación.

Problemas:

3. Problema. Determina cuántos hay en cada caso.

5 platos con 7 huevos cada uno	4 columnas de 7 estampillas cada una	3 cajas. cada una con 9 lápices
--------------------------------	--------------------------------------	---------------------------------

4. Problema. Resuelva los siguientes problemas.

- (1) Hay 6 jaibas en cada bolsa. Si hay 3 bolsas, ¿cuántas jaibas hay en total?
- (2) Se compra a 8 pesos la hoja papel carta ¿Cuántos pesos valen 7 hojas de papel carta?
- (3) Necesito 4 alambres que midan 7 centímetros cada uno. ¿Cuántos centímetros de alambre necesito en total?
- (4) Durante 8 semanas, he escrito 9 canciones por semana. ¿Cuántas canciones he escrito?

5. Problema. ¿Qué cálculo hacemos?

- (1) Hay 8 frutillas en cada plato. Hay 3 platos. ¿Cuántos platos hay?
- (2) Hay 9 chocolates por caja. Si como 7 de cada caja, ¿cuántos quedan?
- (3) Hay 9 naranjas en un canasto y cuatro naranjas en un plato. ¿Cuántas naranjas hay en total?
- (4) Le dieron lápices a 7 niños. Cada niño recibió 3 lápices. ¿Cuántos lápices fueron necesarios?

6. Problema. Construir un problema para 7×3 usando las palabras "galleta" y "plato".

7. Problema. Cuenta el número de círculos usando la multiplicación.

(a)	(b)
o o	o o

Atendiendo al tiempo, el profesor solicita a los alumnos que hagan sólo el primer ítem de los problemas 3 y 4.

Con estos problemas se refuerza el sentido de la multiplicación, el planteamiento operatorio y la forma de calcular o recuperar de la memoria.

El problema 5 exige a los alumnos entender el sentido del enunciado, para identificar la operación que corresponda. Este problema es distinto a los anteriores, por lo que el profesor solicita que respondan a todas las preguntas.

El problema 6 vuelve a centrarse en el planteamiento de la operación.

El problema 7 admite distintas formas de resolución. Por ejemplo en la pregunta (a) dos respuestas posibles son: $3 \times 7 + 2$, o bien, $8 \times 3 - 1$.

Prof.: Analizaremos los problemas uno a uno.

UNIDAD MULTIPLICACIÓN I: SUBUNIDAD 3. LAS TABLAS DEL 6 AL 9 (14 SESIONES)																																	
Sesión 14: Entreteniéndose con las tablas del 6 al 9. Página 1 de 2																																	
Objetivo de la Sesión: Que el alumno se entretenga usando las tabla del 6 al 9.																																	
Pregunta Central: ¿Siente gusto por jugar usando su conocimiento de las tablas? Esperamos que se entretenga, pues es importante que el alumno aprenda la matemática divirtiéndose, sienta que es agradable y desee seguir aprendiendo.																																	
<p>Prof.: Vamos a jugar. Usaremos las tarjetas de las tablas del 6 al 9. ¿Cuántas tarjetas son?</p> <p>Alumnos: 36.</p> <p>Prof.: Para jugar, tendrán que dibujar una tabla de 4 cuadrados de alto y 4 de ancho en su cuaderno. Las reglas del juego son las siguientes... (Mientras explica, ejemplifica en la pizarra).</p> <p>Alumnos construyen sus tablas, disponiendo los números en cualquier orden, cumpliendo el requisito de que sean productos de las tablas del 6 al 9.</p> <p>Ejemplo de tabla:</p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>85</td><td>56</td><td>14</td><td>6</td></tr> <tr><td>14</td><td>7</td><td>45</td><td>49</td></tr> <tr><td>72</td><td>35</td><td>9</td><td>42</td></tr> <tr><td>28</td><td>32</td><td>40</td><td>16</td></tr> </table> <p>Prof.: Hagamos un primer juego. El profesor toma tarjetas desde su escritorio y dice las expresiones (PO) de los productos, como si fuera en la lotería.</p> <p>Los alumnos están atentos a recordar las tablas (el profesor lleva registro con el anverso de las tarjetas).</p> <p>Prof. (Una vez que dice 20 números): Ahora cuenten sus puntos.</p> <p>Alumno 1: Tengo 3 puntos</p> <p>Alumno 2: No debiste escribir 49 porque sólo aparece una vez en la tabla. Debieras escribir 24 porque aparece dos veces.</p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>85 ○</td><td>56 ○</td><td>14 ○</td><td>6 ○</td></tr> <tr><td>14 ○</td><td>7 ○</td><td>45 ○</td><td>49 ○</td></tr> <tr><td>72 ○</td><td>35 ○</td><td>9 ○</td><td>42 ○</td></tr> <tr><td>28 ○</td><td>32 ○</td><td>40 ○</td><td>16 ○</td></tr> </table> <p>Alumno 3: ¿Qué números debiera colocar en las casillas centrales?</p> <p>Prof.: Para el segundo juego, pueden cambiar los números que eligieron.</p>	85	56	14	6	14	7	45	49	72	35	9	42	28	32	40	16	85 ○	56 ○	14 ○	6 ○	14 ○	7 ○	45 ○	49 ○	72 ○	35 ○	9 ○	42 ○	28 ○	32 ○	40 ○	16 ○	<p>En este juego participa toda la clase.</p> <p>Escribe cualquier número de la tabla del 6 a la tabla del 9 en los 16 cuadrados.</p> <p>Un alumno elige una tarjeta, por ejemplo 7x4, del set completo de las 36 cartas.</p> <p>Si el producto de la multiplicación de la tarjeta aparece en tu tabla, marca ese número con un círculo.</p> <p>Se repite la extracción de tarjetas. El alumno obtiene 1 punto cuando alcanza un círculo sobre cada uno de todos los números de una fila, columna o diagonal.</p> <p>El alumno que obtiene más puntos gana.</p> <p>El curso juega una vez.</p> <p>Luego, el profesor pide a los alumnos que piensen en un plan para ganar el juego y que construyan otra tarjeta.</p> <p>Los alumnos piensan en los productos que se repiten de las tablas y ubican esos números en las diagonales.</p>
85	56	14	6																														
14	7	45	49																														
72	35	9	42																														
28	32	40	16																														
85 ○	56 ○	14 ○	6 ○																														
14 ○	7 ○	45 ○	49 ○																														
72 ○	35 ○	9 ○	42 ○																														
28 ○	32 ○	40 ○	16 ○																														

UNIDAD MULTIPLICACIÓN I: SUBUNIDAD 3. LAS TABLAS DEL 6 AL 9 (14 SESIONES)

Sesión 14: Entreteniéndose con las tablas del 6 al 9.

Página 2 de 2

Objetivo de la Sesión: Que el alumno se entretenga usando las tabla del 6 al 9.

Pregunta Central: ¿Siente gusto el alumno por jugar usando su conocimiento de las tablas?

Esperamos que el alumno se entretenga, pues es importante que el alumno aprenda la matemática divirtiéndose, sienta que es agradable y desee seguir aprendiendo.

Prof.: Vamos a jugar con un tablero y dos dados. Además usaremos 30 fichas para cubrir algunos casilleros.

Hoy vamos a jugar, primero con dados y luego con tarjetas.

fila \ columna	4	7	9	3	6	8
8	32					
4				12		
9			81			
5						40
7			63			
6					36	

Dado para filas



Dado para columnas



Se requiere materiales especiales. El tablero lo pueden hacer los alumnos en el cuaderno o en base a una fotocopia. Los dados pueden ser contruidos con trozos de madera o bien sustituidos por una pirnola o un mazo de tarjetas de multiplicación hechas por el alumno.

Para construir el tablero, escriben los números de la primera fila y primera columna. Al interior escriben los productos de los números de la primera fila y primera columna.

Luego, se cubren las respuestas con 30 fichas, quedando algunas descubiertas.

Prof.: Para jugar, lanza los dos dados (o aplica sustituto) a la vez. Multiplica los dos números y di la respuesta. Si la respuesta esta correcta tú ganas la ficha o tapita de ese cuadrado. Si no hay ficha o tapita en ese cuadrado, tienes que poner una de las tuyas en ese cuadrado. Decide el número de veces que tirarás los dados y juega por turnos. El niño que obtenga el mayor número de fichas será el ganador.

Propiedades de las tablas y de la tabla completa

Esta sección se inicia con el relato de una clase creada por el profesor Tsubota en la que insta a los alumnos a descubrir regularidades en la tabla. Luego se ofrecen algunas sugerencias con respecto a la enseñanza de la multiplicación por 1 y con respecto al estudio de la tabla de multiplicar completa, de 1×1 a 9×9 . La sección finaliza con la presentación de planes de clases de la Subunidad completa "Propiedades de la tabla" que consta de 7 sesiones.

- Clase para investigar: Propiedades de la multiplicación

El siguiente plan de clases fue creado por el profesor Koso Tsubota de la escuela elemental anexa a la Universidad de Tsukuba. El tema de la clase es "Enseñando propiedades de la tabla de multiplicar"

Introducción

Con la llegada del otoño en Japón a los alumnos de 2° grado en todas las escuelas se les ve recitar la tabla frente a sus profesores, porque recordar la tabla es parte de la tradición en Japón. ¿Qué tipo de ayudas provee el profesor cuando sus estudiantes aprenden la tabla de multiplicar? Cuando se enseña la tabla de multiplicación es usual la siguiente secuencia de pasos:

- (1) El significado de la multiplicación se construye con la situación conocida: formas de contar y adiciones iteradas,
- (2) Se desarrolla la tabla de multiplicar hasta el 9. La tabla de multiplicar se extiende hasta el 9 por 9 a través de exploraciones,
- (3) Se pide a los estudiantes que reciten las tablas de multiplicar y se les pide que las apliquen, y
- (4) La tabla de multiplicación como un todo es usada con el objeto de identificar patrones de adición, sustracción y multiplicación.

En esas actividades, muchos profesores se centran en (3). Sin embargo, los alumnos no debieran simplemente memorizar la tabla de multiplicar como si fuera un tipo de canción. En el paso (4), se debiera dar a los alumnos actividades para que puedan descubrir la hermosa regularidad entre los números –en varias filas de respuestas– que constituyen la tabla de multiplicar. Por ejemplo, la suma de los dígitos de las unidades y los dígitos de las decenas de cualquier producto en la tabla de multiplicar por 9 es igual a 9, por ejem-

plo, $9 \times 7 = 63$, $6 + 3 = 9$. más aun, si tomamos cualquier producto de la primera mitad de la fila en la tabla de multiplicación por 9, y sumamos ese al número del producto correspondiente desde el lado opuesto de la segunda mitad, el resultado será 90. Tomemos por ejemplos, $9 \times 1 = 9$ y $9 \times 9 = 81$, y $9 + 81 = 90$ y similarmente $9 \times 2 = 18$ y $9 \times 8 = 72$, y $18 + 72 = 90$.

Preparando la etapa del "por qué". Los niños desarrollan un sentimiento de "asombro" a partir del descubrimiento de los aspectos problemáticos en los mismos problemas, e idealmente las clases debieran estar diseñadas para permitir a los niños ir detrás de este tipo de preguntas que indagán el "por qué".

Fueron desarrollados materiales para que los alumnos vieran en esta clase dos expresiones multiplicativas y se asombraran ante el hecho de que las respuestas eran iguales. Ellos preguntan ¿por qué?, observando con cuidado las expresiones, transformándolas y conjeturando una respuesta, encuentran relaciones entre los números. Las expresiones dadas a los niños fueron:

$$(A) 4 \times 4$$

$$(B) 8 \times 8$$

Se les preguntó a los niños cuál de las expresiones da el resultado mayor.

Sin embargo, la respuesta no les es fácil de encontrar, incluso cuando hacen los cálculos en papel. Entonces a los niños se les permitió usar calculadora para obtener la respuesta. Ya en este momento pueden usar la función constante para el cálculo. La función consiste en presionar $4 \times x = \dots$ $8 \times x = \dots$. Cuando la calculadora muestra las respuestas correctas se constata que son exactamente las mismas. La respuesta para ambos problemas es 16777216.

En este momento, la pregunta ¿por qué las respuestas son iguales? aparece en las mentes de los alumnos. El tiempo de la clase transcurre mientras los alumnos tratan de responder la pregunta y discutiendo el problema entre ellos.

El profesor debiera permitir la interacción entre los niños y guiar la discusión hacia el pensamiento matemático. Por ejemplo, el profesor debiera tratar que los niños ganen una comprensión de los números 4 y 8, como por ejemplo que $4 \times 4 \times 4 = 64$ y $8 \times 8 = 64$ son iguales, o que los números se descomponen en $4 = 2 \times 2$ y $8 = 2 \times 2 \times 2$. La estructura de este problema usa el hecho de que $4^{12} = 8^8$, en otras palabras, $4^{12} = (2^2)^{12}$, $8^8 = (2^3)^8$.

¿Cómo iniciar la clase? "Ahora escribiré dos expresiones matemáticas en la pi-

zarra. Tan pronto como termine, les preguntaré cuál de ellas da la respuesta mayor. Espero que den una predicción intuitiva, entonces levanten la mano para la expresión que piensen que es mayor”.

El profesor entonces escribe las siguientes dos expresiones en silencio en la pizarra.

Los alumnos miran atentamente a la pizarra mientras el profesor escribe las expresiones. Ellos están pensando acerca de las respuestas a los dos problemas de adición.

$$(A) 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$$

$$(B) 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8$$

Después de escribir en la pizarra, el profesor dice: “Bien, entonces preguntaré. Primero, ¿quién piensa que el resultado de A es más grande?”

Pocos alumnos levantan su mano. El profesor continúa con, ¿quién piensa que B tiene una respuesta mayor? En este momento muchos alumnos levantan su mano. La mayoría piensa que 8 es más grande. El profesor, entonces pregunta ¿por qué piensa así? Los alumnos, es probable, que den muchas respuestas diferentes. El profesor pregunta a uno de los alumnos que levantó su mano.

A.: Yo calculé la respuesta. Yo pensé en una adición simple.

El profesor pregunta: “Bien, entonces, ¿cómo calculaste la respuesta?” A lo cual el alumno replica que usó la multiplicación. Cuando el profesor solicita que escriban la expresión, los alumnos escriben:

$$(A) 4 \times 12 = 48$$

$$(B) 8 \times 8 = 64.$$

La mayoría de los alumnos concuerda en que es correcto. El profesor pregunta entonces, “¿alguna otra razón?” Otro estudiante da otra razón. Va a la pizarra e intenta explicar dibujando líneas entre las expresiones.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 (4 + 4) & + & (4 + 4) & + & (4 + 4) & + & (4 + 4) & + & (4 + 4) & + & (4 + 4) \\
 | & & | & & | & & | & & | & & | \\
 8 & + & 8 & + & 8 & + & 8 & + & 8 & + & 8 & + & 8 & + & 8 & + & 8
 \end{array}$$

Esto es rápido. Tras agrupar y vincular los números, planea que otros alumnos

lo expliquen. ¿Puede alguien explicar el significado de los agrupamientos?...

Luego de algunas interacciones, el profesor dice: "Ahora viene la pregunta principal de la clase, cambiaré los signos de adición por signos de multiplicación y respondan rápidamente a la pregunta inicial ¿cuál de las expresiones creen que es más grande?..."

- La multiplicación por 1 y la propiedad conmutativa

Debemos ser cuidadosos al enseñar la tabla del 1. En la tabla del 1, en la que el multiplicando es 1, los niños tienen la dificultad de sentir la necesidad de multiplicar. Se sugiere que se enseñe teniendo conciencia del sentido de la multiplicación, "cuántas veces se tiene 1", asociándolo a ejemplos de la vida cotidiana. También es importante que los niños capten que al multiplicar 1 por cualquier número, siempre el producto será igual al multiplicador.

La subunidad que se presenta a continuación finaliza con la propiedad conmutativa de la multiplicación. Generalmente los profesores explican esta propiedad diciendo a los niños por ejemplo " 2×3 y 3×2 da lo mismo", sin embargo esta manera no fomenta el placer de aprender en los niños. Es mejor utilizar la actividad de formar la tabla de dos dimensiones para que descubran por su esfuerzo que al aumentar en 1 el multiplicador, el producto aumenta en 1 vez la cantidad del multiplicando y aunque se intercambien el multiplicando y el multiplicador el producto no cambia. Además se espera cultivar el sentido de los números observando toda la tabla completa de dos dimensiones.

- Planificación de la subunidad "Propiedades de la tabla"

La subunidad contiene 8 sesiones. Éstas se refieren a construir y memorizar ejercitar y aplicar la tabla del 1, construir y leer la tabla bidimensional para la multiplicación, descubrir la relación entre el multiplicador y el producto, descubrir la conmutatividad en la multiplicación, ejercitar y aplicar las tablas, ejercitar y entretenerse con las tablas y con la multiplicación.

UNIDAD MULTIPLICACIÓN I: SUBUNIDAD 4. PROPIEDADES DE LA TABLA (7 SESIONES)

Sesión 1: Construyendo y memorizando la tabla del 1.

Página 1 de 2

Objetivo de la Sesión: Que el alumno construya y memorice la tabla del 1.

Pregunta Central: ¿Qué significa multiplicar por uno?

Esperamos que el alumno generalice la multiplicación usando el 1 como multiplicando, le dé sentido a la tabla del 1 y deduzca sus productos.

Prof. (Mostrando la lámina):

¿Cuántas llaves hay en cada llavero y cuántos llaveros hay?

Situación problema: ¿Cuál es el procedimiento operatorio en el caso que cada llavero tiene 1 llave?

Prof.: ¿Cómo plantea la operación si hay 3 llaves en cada llavero? ¿Si hay 2? Piense paso a paso desde el caso que hay más llaves en cada llavero.

Alumnos responden y plantean la operación.

Prof.: ¿Cómo plantea la operación cuando hay 1 llave en cada llavero? ¿Cuántas llaves hay en total? ¿Cuál es la cantidad en cada grupo?

Alumno: Cada grupo tiene 1, el total es $1 \times 4 = 4$.

Pizarra Procedimiento operatorio: $1 \times 4 = 4$

Respuesta: Hay 4 llaves.

Prof.: ¿Cuánto es, entonces, 1×3 y 1×2 ? ... Construyamos la tabla del 1.

Los alumnos construyen la tabla del 1 en sus cuadernos y comentan que es fácil.

Prof.: Cuando se aumenta en 1 el multiplicador, ¿cuánto aumenta el producto?

Alumno: Aumenta en 1.

Prof.: ¿Hay algo que notaron observando el multiplicador y el producto?

Alumno 1: Los productos son iguales a los multiplicadores. El 1 multiplicado por cualquier número es igual al número.

El profesor pide a los alumnos que lean e identifiquen los datos para entender el sentido del problema

Presenta el problema, representándolo en una lámina en la pizarra.

Determinar el procedimiento operatorio para el caso en que el multiplicando es 1.

El profesor avanza paso a paso a la respuesta pensando desde el caso en que hay más llaves en cada llavero.

El profesor intenta que los alumnos se den cuenta que pueden usar la multiplicación aunque la cantidad en cada grupo es uno.

Construir la tabla del 1.

El profesor muestra la lámina con círculos como soporte para construir la tabla.

Pensar en características de la tabla del 1. La igualdad entre el multiplicador y el producto no ocurre en las otras tablas.

UNIDAD MULTIPLICACIÓN I: SUBUNIDAD 4. PROPIEDADES DE LA TABLA (7 SESIONES)	
Sesión 1: Construyendo y memorizando la tabla del 1. Página 2 de 2 Objetivo de la Sesión: Que el alumno construya y memorice la tabla del 1. Pregunta Central: ¿Qué significa multiplicar por uno? Esperamos que el alumno generalice la multiplicación usando el 1 como multiplicando, le dé sentido a la tabla del 1 y deduzca sus productos.	
<p>Alumno 2: En los productos no cambia la cantidad del multiplicando aunque se multiplique por 1.</p> <p>Prof.: ¿Recuerdan cuánto es 2×1, 3×1, 4×1, ...?</p> <p>Alumnos: Sí, 1 (erróneamente).</p> <p>Prof.: Podemos usar la palabra "con" en vez de "por", ya que cuando multiplicamos con el uno, como multiplicador o multiplicando, el resultado es igual al otro número.</p> <p>Prof.: Haremos tarjetas para memorizar la multiplicación por 1.</p> <p>Alumnos hacen las tarjetas y practican y comentan que la tabla del 1 es muy fácil.</p> <p>Prof.: Resuelvan los siguientes ejercicios.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Ejercicios:</p> <p>(1) $1 \times 8 =$ (2) $1 \times 2 =$ (3) $1 \times 5 =$ (4) $1 \times 9 =$ (5) $1 \times 3 =$ (6) $1 \times 6 =$ (7) $1 \times 7 =$ (8) $1 \times 4 =$ (9) $1 \times 1 =$</p> </div> <p>Alumnos resuelven con rapidez.</p> <p>Prof.: Resuelvan los siguientes problemas:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Problemas:</p> <p>(1) En cada bolsa hay una sandía. Si hay 7 bolsas, ¿cuántas sandías hay en total?</p> <p>(2) Hay 8 niñas y cada niña tiene un anillo. ¿Cuántos anillos hay en total?</p> </div>	<p>El profesor utiliza la expresión "multiplicar con 1", para que los niños y las niñas entiendan que la regla se aplica cuando "1" es cualquiera, el multiplicando o bien el multiplicador.</p> <p>Memorizar la tabla. El profesor recurre a las tarjetas para practicar la multiplicación por 1.</p> <p>Luego hacen ejercicios planteados en el texto.</p> <p>Nota: En la vida cotidiana es raro encontrar una situación que requiera del uso de la tabla del 1 y no es fácil que el alumno sienta que el 1 es el número que indica la cantidad de objetos que tiene cierto grupo. Sin embargo esa multiplicación se usa cuando se multiplican los números de 2 cifras, por ejemplo, 28×31.</p>

UNIDAD MULTIPLICACIÓN I: SUBUNIDAD 4. PROPIEDADES DE LA TABLA (7 SESIONES)

Sesión 2: Construyendo y leyendo la tabla bidimensional para la multiplicación.

Página 1 de 2

Objetivo de la Sesión: Identifique regularidades en la tabla de multiplicar bidimensional

Pregunta Central: ¿Cómo se construye y qué características tiene la tabla de la multiplicación de dos dimensiones?

Esperamos que el alumno relacione la tabla bidimensional con todas las tablas y reconozca algunas características de ella: como por ejemplo que algunos productos se repiten y que en la tabla del 5 las cifras de las unidades son 0 y 5.

Prof.: ¿Qué observan en la tabla?

Alumno: ¿Qué significa "casillas para el multiplicador"?

Prof.: Las casillas son los cuadrados donde ponemos números. Piensen en la tabla del 2. ¿Dónde piensan que pondremos los productos de la tabla del 2?

Alumnos dan ideas basándose en la sugerencia e interpretan el significado de las casillas para el multiplicador.

Tabla en una lámina: Complete la tabla.

		Casillas del multiplicador								
		x	1	2	3	4	5	6	7	8
Casillas del multiplicando	1									
	2	2	4	6	8					
	3									
	4									
	5									
	6									
	7									
	8									
	9									

Situación problema:

¿Cómo resumir las tablas del 1 al 9 en una sola tabla?
 ¿Cómo interpretar esta nueva tabla?
 ¿Qué secretos tiene esta tabla?

Prof.: Construyan la tabla. En ella tenemos ya escritas cuatro casillas de la tabla del 2.

Prof.: Completamos la tabla del 3 y continúan individualmente con todos los productos, diciendo cada tabla.

El profesor da el indicio de las casillas del multiplicador y del multiplicando. Además escribe 4 casillas para la tabla del 2, los 4 primeros productos.

Da tiempo para que los alumnos trabajen individualmente. Una vez que gran parte del curso termina, elige a 5 alumnos para que escriban las respuestas, todos a la vez. Luego, pide a todos los niños que opinen, sin borrar los errores, sino marcándolos con X y corrigiéndolos.

De manera análoga continúa con el resto de los ejercicios.

El profesor atiende a los alumnos en sus puestos, dando preferencia a los alumnos que tienen mayor dificultad.

El profesor garantiza el tiempo para que todos los alumnos terminen los ejercicios pedidos.

UNIDAD MULTIPLICACIÓN I: SUBUNIDAD 4. PROPIEDADES DE LA TABLA (7 SESIONES) Sesión 2: Construyendo y leyendo la tabla bidimensional. Página 2 de 2 Objetivo de Sesión: Identifique regularidades en la tabla de multiplicar bidimensional. Pregunta Central: ¿Cómo se construye y qué características tiene la tabla de la multiplicación de dos dimensiones?	
<p>Prof.: Ahora practicaremos la lectura de la tabla. ¿Quién señala en la lámina dónde está el producto de 4×5?</p> <p>Alumno sale adelante y señala con el dedo.</p> <p>Prof.: Bien, practiquen con su compañero, alternadamente, dos productos.</p> <p>Alumno sale a la pizarra y explica. Luego otro alumno responde a la pregunta del profesor.</p> <p>Prof.: ¿Descubrieron algo especial observando los productos de la tabla?</p> <p>Alumno 1: En la columna del 6 los números aumentan de 6 en 6.</p> <p>Alumno 2: Los productos se ven como reflejados en el eje, como las simetrías de las figuras.</p> <p>Alumno 3. Hay productos que aparecen 1 vez, otros 2 y otros más de 2 veces.</p> <p>Prof.: ¿Qué números aparecen sólo una vez. ¿Dónde se ubican esos números?</p> <p>Alumnos: El 49, el 81.</p> <p>Alumno: Están en el centro, en la diagonal. Ya que la tabla muestra simetría.</p> <p>Prof.: ¿Qué números aparecen muchas veces?</p> <p>Alumnos: el 16, el 24...</p> <p>Prof.: ¿Observan alguna regla interesante para la colocación de 16 ó 24?</p> <p>Prof.: Para concluir la clase (cierre), van a anotar las características o secretos que esconde la tabla de multiplicar. Pueden ayudarse con sus compañeros.</p> <p>Los alumnos trabajan en sus puestos. El profesor observa el trabajo de los alumnos y apoya a los alumnos que se lo piden, en la redacción de sus frases.</p>	<p>El profesor solicita a los alumnos practicar la manera de leer la tabla.</p> <p>El profesor pide a los alumnos que identifiquen características de la tabla.</p> <p>El profesor trata de que los alumnos profundicen sobre las propiedades que identifican, de modo que las relacionen con las propiedades del producto. Por ejemplo, la conmutatividad o las distintas descomposiciones en factores que puede tener un número.</p> <p>La comunicación oral y escrita es importante. Los alumnos disponen de tiempo para verbalizar y escribir las ideas matemáticas que ellos entienden.</p> <p>Se va mejorando la precisión en el lenguaje. Es bueno pedir que expresen sus ideas en pocas palabras en el planteamiento de las ideas. Recomienda el uso de esquemas y ejemplos.</p>

UNIDAD MULTIPLICACIÓN I: SUBUNIDAD 4. PROPIEDADES DE LA TABLA (7 SESIONES)																																									
<p>Sesión 3: Descubriendo la relación entre el multiplicador y el producto. Página 1 de 2</p> <p>Objetivo de la Sesión: Descubrir la relación entre el multiplicador y el producto como la característica de la multiplicación.</p> <p>Pregunta Central: ¿Cuál es la relación entre el multiplicador y el producto en la multiplicación? Esperamos que el alumno reconozca que la característica de la multiplicación es que el producto aumenta la cantidad del multiplicando cuando el multiplicador aumenta en 1.</p>																																									
<p>Situación problema: Dada una tabla de multiplicar, identificar la regularidad que la caracteriza.</p> <p>Prof.: Investiguemos la tabla del 3 ¿Qué observan en la tabla?</p> <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <thead> <tr> <th colspan="10" style="text-align: left;">Tabla en una lámina:</th> </tr> <tr> <td></td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>9</td> </tr> <tr> <td>3x</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>3</td> <td>6</td> <td>9</td> <td>12</td> <td>15</td> <td>18</td> <td>21</td> <td>24</td> <td>27</td> </tr> </thead></table> <p>Alumno: Aumenta de 3 en 3.</p> <p>Prof.: ¿Cuál es el multiplicando, el multiplicador, el producto? ¿Qué aumenta en 3?</p> <p>Alumno: El producto aumenta en 3.</p> <p>Prof.: Cuando el multiplicador se aumenta en 1, ¿cuánto aumenta el producto? ¿Qué relación hay entre ambos números, entre el multiplicador y el producto?</p> <p>Alumno: Cuando el multiplicador aumenta en 1 el producto aumenta en 3.</p> <p>Prof.: ¿Por qué el producto aumenta en 3 cuando el multiplicador aumenta en 1? Convérselo con su compañero.</p> <p>Alumnos dan sus ideas.</p> <p>Prof.: Observe la tabla del 8. Cuando el multiplicador aumenta en 1, ¿cuánto aumenta el producto?</p> <p>Alumno: Aumenta en 8.</p>	Tabla en una lámina:											1	2	3	4	5	6	7	8	9	3x											3	6	9	12	15	18	21	24	27	<p>Entender el tema, pensar cómo aumenta el producto:</p> <p>El profesor hace que los alumnos digan la tabla del 3 y se den cuenta que en la multiplicación, cuando el multiplicando aumenta en 1 el producto aumenta la cantidad del multiplicador.</p> <p>También se tiene que cuando el multiplicador aumenta en 1, el producto aumenta la cantidad del multiplicando.</p> <p>El profesor da tiempo para que los alumnos piensen y expliquen la razón con sus propias palabras.</p> <p>Observar la tabla del 8 y pensar en la forma de aumentar el producto:</p> <p>El profesor sigue el mismo procedimiento que la actividad anterior.</p>
Tabla en una lámina:																																									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9																																
3x																																									
	3	6	9	12	15	18	21	24	27																																

<p>UNIDAD MULTIPLICACIÓN I: SUBUNIDAD 4. PROPIEDADES DE LA TABLA (7 SESIONES)</p> <p>Sesión 3: Descubriendo la relación entre el multiplicador y el producto. Página 2 de 2</p> <p>Objetivo de la Sesión: Descubrir la relación entre el multiplicador y el producto como la característica de la multiplicación.</p> <p>Pregunta Central: ¿Cuál es la relación entre el multiplicador y el producto en la multiplicación?</p> <p>Esperamos que el alumno reconozca que la característica de la multiplicación es que el producto aumenta la cantidad del multiplicando cuando el multiplicador aumenta en 1.</p>	
<p>Prof.: Investigue en las otras tablas también. Escojan otra tabla, analicen y luego comenten con su compañero. Tienen 3 minutos.</p> <p>Alumnos leen, hacen anotaciones y conversan con su compañero.</p> <p>Prof. (tras unos minutos procede al cierre de la clase): Vamos a anotar lo que podemos concluir de esta clase. ¿Qué pueden decir?</p> <p>Se espera que los alumnos se den cuenta que en la multiplicación, "cuando se aumenta 1 al multiplicador, en el producto aumenta 1 vez la cantidad del multiplicando".</p> <p>Prof.: Una vez que escriban la conclusión en su cuaderno, pueden hacer los ejercicios siguientes</p>	<p>Investigar en las otras tablas: Indicar que escojan las tablas para investigar.</p> <p>El profesor escucha a algunos alumnos en sus puestos, haciéndose una imagen de la comprensión alcanzada por los alumnos.</p> <p>Concluir con la característica de la multiplicación:</p> <p>El profesor da la palabra a un alumno para que dé su conclusión y luego a otros dos alumnos para que la digan con sus palabras. Finalmente, él la escribe en la pizarra.</p> <p>Resolver ejercicios:</p> <p>El profesor propone una lista de ejercicios para controlar la comprensión de los alumnos. Recorre la sala.</p>
<p>Ejercicios: Escribe en las líneas punteadas los números que correspondan.</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) En la tabla del 7, cuando multiplicador se aumenta en 1, el producto aumenta en.... (2) La tabla cuyos productos aumentan de 5 en 5 es la tabla del ... (3) 3×8 es ... más que 3×7. (4) $9 \times \dots$ es 9 más que 9×3. (5) 6×3 es 6 menos que $6 \times \dots$ (6) 4 menos que 4×3 es ... $\times 2$. <p>El profesor pasa por los bancos y apoya a los alumnos que tienen dificultad.</p>	

UNIDAD MULTIPLICACIÓN I: SUBUNIDAD 4. PROPIEDADES DE LA TABLA (7 SESIONES)**Sesión 4:** Descubriendo la conmutatividad de la multiplicación.

Página 1 de 2

Objetivo de la Sesión: Descubrir la propiedad conmutativa de la multiplicación como una regla.**Pregunta Central:** ¿Se mantiene el producto si se conmutan los números del multiplicador y multiplicando?

Esperamos que el alumno descubra que la conmutatividad es verdadera para todos los números de la tabla de dos dimensiones.

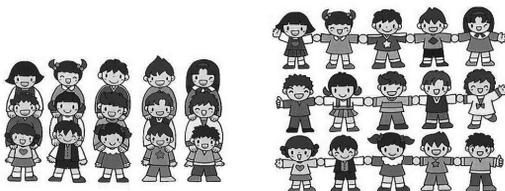
Situación problema: Dadas tres multiplicaciones, buscar en la tabla otra multiplicación que tenga igual producto y analizar por qué el producto es el mismo.Prof.: Miren la tabla de multiplicar de dos dimensiones y encuentren la multiplicación que da el mismo producto que las siguientes multiplicaciones (escribe en la pizarra). Empecemos con $3 \times 5 = 15$.**Pizarra:**

$$3 \times 5 = 15 \quad 3 \times 7 = 21 \quad 5 \times 6 = 30$$

Alumno: 5×3 .Prof.: ¿Por qué el producto entre 3×5 y 5×3 es el mismo?

Pueden ayudarse con porotos, la colección de pelotas o la tabla de la multiplicación.

Se espera que los alumnos hagan representaciones.

Se espera que los alumnos expliquen que "desde otro punto de vista, el mismo grupo de objetos de 3×5 puede ser la representación del sentido de 5×3 ".

Prof.: Analicen qué multiplicación da 21 y cuál da 30.

Alumnos ratifican que las nuevas multiplicaciones sólo cambian en el orden de los factores.

Entender el tema:
Investigar la tabla de multiplicar.Encontrar la multiplicación que tiene el mismo producto que 3×5 :

Los alumnos disponen de la tabla de dos dimensiones.

Analizar la razón por la que el producto es el mismo:

El profesor da tiempo para que los alumnos trabajen en sus bancos y apoya a los alumnos que tienen dificultad.

El profesor, al observar el trabajo de los alumnos en sus bancos, decide qué alumnos y en qué orden expresarán sus opiniones en público a sus compañeros.

El profesor ratifica la propiedad conmutativa de la multiplicación sin aún usar el término "propiedad conmutativa".

UNIDAD MULTIPLICACIÓN I: SUBUNIDAD 4. PROPIEDADES DE LA TABLA (7 SESIONES)	
Sesión 4: Descubriendo la conmutatividad de la multiplicación. Página 2 de 2	
Objetivo de la Sesión: Descubrir la propiedad conmutativa de la multiplicación como una regla	
Pregunta Central: ¿Se mantiene el producto si se conmutan los números del multiplicador y multiplicando?	
<p>Prof.: Ahora, encuentren la multiplicación cuyo producto da 24.</p> <p>Los alumnos notan que hay 4 productos que dan 24, 3×8, 8×3, 4×6 y 6×4.</p> <p>Prof.: ¿Hay más productos en la tabla que se puedan descomponer en más de una multiplicación?</p> <p>Prof.: Respondan sin mirar la tabla. ¿Todo producto debe aparecer dos o más veces en la tabla o puede ocurrir que un producto aparezca una sola vez?</p> <p>Alumnos hacen predicciones.</p> <p>Prof.: Vean la tabla y verifiquen su predicción. En sus casas podrán escribir en el cuaderno una explicación de por qué su predicción fue correcta o no lo fue... Ahora terminaremos la clase con los siguientes ejercicios.</p>	<p>Encontrar multiplicaciones cuyo producto es 24:</p> <p>El profesor intenta que los alumnos se den cuenta que un producto se puede descomponer en distintas multiplicaciones.</p> <p>Encontrar otras multiplicaciones que tienen el mismo producto:</p> <p>Los productos se pueden descomponer en grupos. Grupos de números según el número de factorizaciones que admiten con los números de la tabla.</p> <p>El profesor deja el tema abierto y pide resolver unos ejercicios, dejando libre que el alumno se pregunte por qué algunos productos admiten más factorizaciones que otros.</p> <p>Resolver los ejercicios dados:</p>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> <p>Ejercicios en la pizarra</p> <p>Encuentre las multiplicaciones que den como producto el número indicado:</p> <p>a) 49 b) 35 c) 16 d) 12</p> </div>	

UNIDAD MULTIPLICACIÓN I: SUBUNIDAD 4. PROPIEDADES DE LA TABLA (7 SESIONES)	
Sesión 5: Ejercitando y aplicando las tablas multiplicación. Página 1 de 2 Objetivo de la Sesión: Resolver los ejercicios y problemas de la aplicación de la multiplicación. Pregunta Central: ¿Recuerdas las tablas y es capaz de usarlas para resolver problemas? Esperamos que el alumno resuelva ejercicios y problemas en los que aplique las tablas del 0 al 9.	
<p>Primera actividad: Resolver ejercicios de multiplicación.</p> <p>Prof.: Resuelvan los ejercicios.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Ejercicios</p> <p>1. Obtenga el producto para las siguientes multiplicaciones:</p> <p>(1) $1 \times 4 =$ (2) $7 \times 8 =$ (3) $3 \times 4 =$ (4) $5 \times 7 =$ (5) $6 \times 4 =$ (6) $9 \times 4 =$ (7) $2 \times 7 =$ (8) $6 \times 0 =$ (9) $4 \times 4 =$ (10) $8 \times 9 =$ (11) $5 \times 3 =$ (12) $6 \times 9 =$ (13) $1 \times 7 =$ (14) $0 \times 3 =$ (15) $7 \times 6 =$ (16) $3 \times 8 =$ (17) $9 \times 7 =$ (18) $8 \times 6 =$ (19) $2 \times 9 =$ (20) $4 \times 8 =$</p> <p>2. Escriba en las líneas punteadas el número que corresponde:</p> <p>(1) 8×6 es más que 8×5. (2) En la tabla del ... los productos aumentan de 4 en 4. (3) $9 \times 3 =$ (4) Los productos que resultan del factor 8 son: </p> </div> <p>Prof. (luego de unos minutos): Salgan 5 alumnos de esta fila, cada uno escribe una respuesta. -enseguida- ¿Tienen alguna duda?</p> <p>El profesor atiende a los alumnos en sus puestos, dando preferencia a los alumnos que tienen mayor dificultad.</p>	<p>El profesor da tiempo para que los alumnos trabajen individualmente. Una vez que gran parte del curso termina, elige a 5 alumnos para que escriban las respuestas, todos a la vez. Luego, pide a todos los niños que opinen, sin borrar los errores, sino marcándolos con X y corrigiéndolos.</p> <p>De manera análoga continúa con el resto de los ejercicios.</p> <p>El profesor garantiza el tiempo para que todos los alumnos terminen los ejercicios pedidos.</p> <p>El profesor se asegura que los alumnos comprendan la propiedad conmutativa de la multiplicación, el sentido y la forma de plantear la operación, y la manera de aplicar la multiplicación en la resolución de problemas.</p>

UNIDAD MULTIPLICACIÓN I: SUBUNIDAD 4. PROPIEDADES DE LA TABLA (7 SESIONES) Sesión 5: Ejercitando y aplicando las tablas multiplicación. Página 2 de 2 Objetivo de la Sesión: Resolver los ejercicios y problemas de la aplicación de la multiplicación. Pregunta Central: ¿Recuerda las tablas y es capaz de usarlas para resolver problemas?	
<p>Segunda actividad: Resolver problemas de multiplicación.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Problemas Resuelva los siguientes problemas:</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) En una bolsa hay 6 dulces. Si hay 7 bolsas, ¿cuántos dulces hay en total? (2) Tengo 2 cajas que pesan 4 kilogramos cada una. ¿Cuántos kilogramos pesan en total? (3) Si una mesa es para 8 personas, ¿cuántas personas habría en 3 mesas? (4) A cinco hermanos les regalaron siete cuadernos a cada uno. ¿Cuántos cuadernos les regalaron en total? </div> <p>Prof.: No olviden escribir el procedimiento operatorio, antes de escribir la respuesta a cada problema.</p> <p>Un alumno resuelve un problema en la pizarra y luego lo explica. Surgen comentarios y preguntas entre alumnos. Luego sale otro alumno a exponer otro ejercicio. Los alumnos salen de a uno a la pizarra.</p>	<p>El profesor da tiempo para que los alumnos trabajen individualmente en la resolución de los problemas. Luego da tiempo para la discusión plenaria cuando los alumnos salen a la pizarra a exponer su forma de resolución.</p> <p>El profesor admite que otros alumnos hagan comentarios y expongan sus diferencias en cuanto al resultado o la forma de resolver.</p> <p>El profesor se asegura que los alumnos comprendan el sentido y la forma de plantear la operación, y la manera de aplicar la multiplicación en la resolución de los problemas.</p>

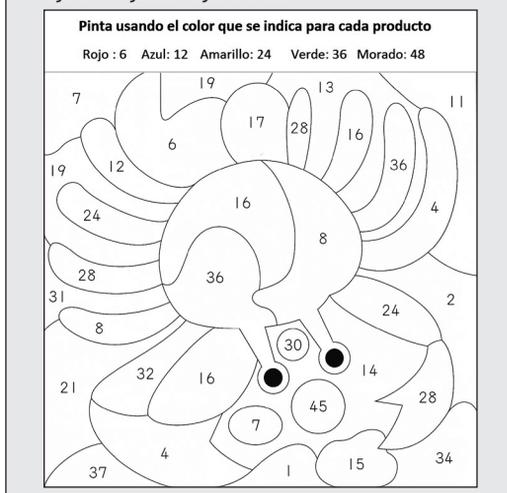
UNIDAD MULTIPLICACIÓN I: SUBUNIDAD 4. PROPIEDADES DE LA TABLA (7 SESIONES)**Sesión 6:** Ejercitando y entreteniéndonos con las tablas.

Página 1 de 1

Objetivo de la Sesión: Resolver los ejercicios y entretenerse aplicando la multiplicación.**Pregunta Central:** ¿Recuerdas las tablas y se entretiene usándolas en juegos? Esperamos resuelva ejercicios y se entretenga recordando las tablas del 0 al 9.**Primera actividad:** Ejercicio de reconocimiento simple.

Prof.: Pinten el dibujo con el color indicado para cada producto.

Dibujo en hoja con ejercicios:



Prof.: Pueden inventar su propio dibujo con otros productos, por ejemplo con la tabla del siete o del nueve.

Segunda actividad: Jugar practicando la multiplicación.**Juego en parejas:**

Instrucciones del juego

1. Cada uno prepara 10 tarjetas, con los dígitos de 0 a 9.
2. Cada uno mezcla sus tarjetas y las coloca con la cara hacia abajo.
3. Cada uno saca dos tarjetas en orden del grupo de tarjetas.
4. Multiplicar los dos dígitos que salieron.
5. El que tiene el producto mayor recibe las tarjetas.
6. El que tiene más tarjetas gana.

El profesor aprovecha la clase para controlar el nivel de logros de los alumnos, con respecto a la memorización de las tablas, mientras los alumnos se entretienen.

Un juego alternativo es pedir a los alumnos que dibujen la figura que prefieran, escriban en cada espacio los productos de la tabla del 8, agreguen más líneas de modo que no se capte qué es el dibujo, y escriban en los espacios que no son los productos de la tabla del 8.

Juego la tabla rompecabezas:

El juego consiste en cortar la tabla de multiplicar en grupos de 5 celdas como piezas de pentominos. Luego, pedir a un compañero que arme el puzzle.

UNIDAD MULTIPLICACIÓN I: SUBUNIDAD 4. PROPIEDADES DE LA TABLA (7 SESIONES)																																				
Sesión 7: Ejercitando y entreteniéndonos con la multiplicación.	Página 1 de 1																																			
Objetivo de la Sesión: Entretenerse aplicando la multiplicación.																																				
Pregunta Central: ¿Se entretiene usando la multiplicación en el juego? Esperamos que el alumno se entretenga recordando las tablas del 0 al 9.																																				
<p>Primera actividad: Juego del Bingo.</p> <p>Prof.: En pareja decidan con qué tabla jugarán. Por ejemplo, la del 7. Preparen las tarjetas de multiplicación para el número elegido, y dibujen en el cuaderno un cuadrado con 9 (3x3) casillas.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Primera regla del juego: Escribir los productos de la tabla elegida en distintas casillas del cuadrado dibujado en el cuaderno.</p> </div> <p>Juan: Esta es mi tabla.</p> <table border="1" style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>35</td><td>49</td><td>28</td></tr> <tr><td>63</td><td>7</td><td>56</td></tr> <tr><td>21</td><td>42</td><td>14</td></tr> </table> <p>Juan: yo parto, mi primera tarjeta es 7x8, el producto es 56.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Segunda regla del juego: Escoger alternadamente una tarjeta con los ojos cerrados. Decir el planteamiento de la operación y el producto de la tarjeta escogida y encerrar el producto escrito en la casilla:</p> </div> <p>Trinidad: Me toca elegir mi tarjeta.</p> <table style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center; border: 1px solid black; padding: 5px;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><th colspan="3">Casillas de Juan</th></tr> <tr><td>35</td><td>49</td><td>28</td></tr> <tr><td>63</td><td>7</td><td style="border: 2px solid black;">56</td></tr> <tr><td>21</td><td>42</td><td>14</td></tr> </table> </td> <td style="text-align: center; border: 1px solid black; padding: 5px;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><th colspan="3">Casillas de Trinidad</th></tr> <tr><td>7</td><td>49</td><td>63</td></tr> <tr><td>42</td><td>14</td><td>21</td></tr> <tr><td>35</td><td>28</td><td>56</td></tr> </table> </td> </tr> </table> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Tercera regla del juego: Repetir esta actividad y cuando tengan tres círculos en la forma vertical, horizontal u oblicua, decir ¡bingo! y gana.</p> </div>	35	49	28	63	7	56	21	42	14	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><th colspan="3">Casillas de Juan</th></tr> <tr><td>35</td><td>49</td><td>28</td></tr> <tr><td>63</td><td>7</td><td style="border: 2px solid black;">56</td></tr> <tr><td>21</td><td>42</td><td>14</td></tr> </table>	Casillas de Juan			35	49	28	63	7	56	21	42	14	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><th colspan="3">Casillas de Trinidad</th></tr> <tr><td>7</td><td>49</td><td>63</td></tr> <tr><td>42</td><td>14</td><td>21</td></tr> <tr><td>35</td><td>28</td><td>56</td></tr> </table>	Casillas de Trinidad			7	49	63	42	14	21	35	28	56	<p>El profesor presenta el juego y ofrece variantes en la medida que pasa el tiempo, de modo que aumente la exigencia y los alumnos mantengan el interés.</p> <p>Variaciones para el juego:</p> <p>A: Escribir en las casillas correspondientes 9 productos escogidos entre 2 tablas de la multiplicación y que pregunten también dentro de esas 2 tablas.</p> <p>B: Escribir en las casillas los planteamientos de las operaciones y que pregunten diciendo los productos para que encuentren el planteamiento correspondiente al producto dicho.</p> <p>C: Aumentar la cantidad de las casillas hasta 16, o sea 4 columnas y 4 filas y realizar el juego con la combinación de 2 tablas de la multiplicación.</p>
35	49	28																																		
63	7	56																																		
21	42	14																																		
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><th colspan="3">Casillas de Juan</th></tr> <tr><td>35</td><td>49</td><td>28</td></tr> <tr><td>63</td><td>7</td><td style="border: 2px solid black;">56</td></tr> <tr><td>21</td><td>42</td><td>14</td></tr> </table>	Casillas de Juan			35	49	28	63	7	56	21	42	14	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><th colspan="3">Casillas de Trinidad</th></tr> <tr><td>7</td><td>49</td><td>63</td></tr> <tr><td>42</td><td>14</td><td>21</td></tr> <tr><td>35</td><td>28</td><td>56</td></tr> </table>	Casillas de Trinidad			7	49	63	42	14	21	35	28	56											
Casillas de Juan																																				
35	49	28																																		
63	7	56																																		
21	42	14																																		
Casillas de Trinidad																																				
7	49	63																																		
42	14	21																																		
35	28	56																																		

PARTE III
Enseñando a multiplicar
números de varias cifras

Términos para enseñar la multiplicación con multidígitos

En la primera parte de este libro se señalaban las tendencias en la enseñanza de los números y sus operaciones, y fueron descritos algunos términos que cimientan un lenguaje para la enseñanza de los números en torno a la resolución de problemas.

Las expresiones descritas a continuación han sido concebidas para enseñar la multiplicación con números multidígitos. Estas descripciones fueron sistematizadas por Treffers et al. (2001) del Instituto Freudenthal, que han investigado por décadas, la enseñanza de los números y sus operaciones, en profundidad.

Nociones de aritmética elemental. El alumno puede llevar adelante operaciones aritméticas de manera correcta teniendo en mente el sentido del número y una comprensión intuitiva de las relaciones numéricas. Alcanzar las nociones de aritmética elemental significa ser capaz de hacer una elección entre el uso de la aritmética mental, la estimación, el cálculo en columna, el algorítmico, o el uso de la calculadora.

Dominio aritmético. El dominio aritmético incluye: efectuar las cuatro operaciones usando procedimientos estándares o alternativos y aplicarlas en situaciones simples. En el marco de estas destrezas aritméticas se incluyen los algoritmos.

Algoritmo. Un algoritmo es un método de cálculo paso por paso que sigue un proceso fijo. Un ejemplo es el algoritmo para la multiplicación, en el cual uno trabaja de derecha a izquierda, procesando dígitos, para alcanzar el producto final.

Automatización. La automatización es la asimilación y aplicación de procedimientos estándares que llevan directamente a un resultado y la cual puede

ser aplicada sin que el sujeto tenga conciencia acerca de ella. La automatización concierne a las operaciones aritméticas virtualmente automáticas, en contraste a la memorización, la cual envuelve resultados aritméticos aprendidos de manera intuitiva. Se dice que un estudiante ha adquirido la automatización, por ejemplo de 9×12 si puede dar rápidamente la respuesta trabajando 9×10 y 9×2 , y seguidamente sumando estos resultados.

Cálculo en columna. El cálculo en columna es una forma de operaciones con números que está entre la aritmética mental y el cálculo por algoritmo. En el cálculo por columna, el trabajo se desarrolla de acuerdo a un modelo fijo: separando las cifras del sistema decimal, cálculo vertical de izquierda a derecha, es decir, desde el más grande al más pequeño. Los resultados intermedios se realizan mentalmente. En contraste al uso del algoritmo, en el cálculo por columna uno trabaja con valores de números enteros y no con dígitos. El cálculo en columna se caracteriza no tanto por la forma vertical de escribir el problema, sino por la estrategia de descomponer (usando los valores posicionales de los números cuando se calculan los resultados intermedios), trabajando desde lo grande a lo pequeño, desde izquierda a derecha. Esto contrasta con los algoritmos, los cuales operan con dígitos trabajando desde lo pequeño a lo grande, y desde derecha a izquierda.

Procedimiento Estándar. Es un método fijo de cálculo, como por ejemplo el cálculo en columnas de una multiplicación en un problema como el que se muestra a la derecha.

$$\begin{array}{r}
 325 \\
 \times 3 \\
 \hline
 900 \quad 300 \times 3 \\
 60 \quad 20 \times 3 \\
 + 15 \quad 5 \times 3 \\
 \hline
 975
 \end{array}$$

Aritmética mental. Aritmética mental es la comprensión total del cálculo con la mente, más que con representaciones escritas del número. Ésta conlleva el uso de hechos ya memorizados y de las propiedades de números y operaciones, y la forma en que estos están relacionados. Esto no es, sin embargo, lo mismo que hacer cálculos mentales; es más una cuestión de usar la mente para usar los cálculos y escribir ciertas etapas si es necesario, es una manera de proceder de forma estratégica. No debiera verse como opuesta a la aritmética escrita. En general se usan tres tipos de estrategias en la aritmética mental: el encadenamiento, la descomposición y las variantes.

El encadenamiento. El encadenamiento es una de las estrategias básicas de la aritmética mental. Cuando se usa esta estrategia de encadenamiento en problemas de sustracción, el primer número o minuendo, a la izquierda, permanece intacto, y el segundo número se descompone en sumandos. En el encadenamiento multiplicativo el multiplicando es visto como un todo que es usado varias veces de manera distributiva o en un proceso de duplicación. Por ejemplo el problema 6×48 puede resolverse como sigue: $3 \times 48 = 144$ y $3 \times 48 = 144$, luego $144 + 144 = 288$.

Descomposición. La descomposición también es una de las estrategias básicas de la aritmética elemental. Ambos números son descompuestos cuando se usa la estrategia de descomposición. Para usar la descomposición en la multiplicación, se descompone el multiplicando en centenas, decenas y unidades u otro valor. Las partes de la descomposición se multiplican separadamente y luego se suman los resultados. Por ejemplo 6×48 puede ser calculado $6 \times 40 = 240$, $6 \times 8 = 48$ y luego $240 + 48 = 288$.

Estrategia de las variantes. La estrategia de las variantes incluye todas aquellas aproximaciones que hacen uso inteligente de los hechos numéricos, relaciones entre los números y las propiedades de las operaciones en la resolución de problemas. Ejemplos de esta aproximación son:

- a) *Redondeo:* $253 + 198 = 253 + 200 - 2$. Otro ejemplo es $19 \times 25 = 20 \times 25 - 1 \times 25$.
- b) *Transformación:* $124 - 78 = 126 - 80$.
- c) *Intercambio* (usando la conmutatividad): $125 \times 7 = 7 \times 125$.
- d) *Conteo o vínculo:* $301 - 298$, se obtiene de decir que $298 + 3 = 301$.
- e) *Duplicación.* Duplicar y calcular mitades: $16 \times 25 = 8 \times 50$.
- f) *Uso de la relación inversa.* Para calcular $75 : 5$ calcula ... $\times 5 = 75$.

Ámbitos de significación de un número. Los números pueden representar magnitudes o tamaño, orden numérico, cantidades, etiquetas o rótulos.

Valor posicional. El valor posicional de un dígito es un número de referencia al valor que ese dígito representa en el número. Por ejemplo, 6 en el número 643 tiene un valor de 600.

Reflexión. Las reflexiones se relacionan con el pensamiento de cómo uno tiene que llevar adelante una operación. Las reflexiones pueden hacerse antes, durante o después del proceso de resolución. En particular, las diferentes

soluciones de otros alumnos y las preguntas que propone el profesor, que desafían el pensamiento de los alumnos, pueden ser entendidas como un proceso que lleva a la reflexión. Los procedimientos rutinarios normalmente no conducen a la reflexión. La reflexión se caracteriza por una manera de pensar flexible.

Número redondo. Es aquel número que termina en uno o más ceros, usado en representación de otro, que puede resultar del proceso de redondear un número.

Tendencias internacionales sobre la enseñanza de la multiplicación

- El algoritmo de la multiplicación en el currículo escolar

Tras la aparición de la Agenda para la Acción (NCTM, 1980) en varios países desarrollados, la enseñanza de la matemática dio paso a la educación matemática realista perdiendo posición el formalismo. Hacia 1985 comienza a usarse ampliamente la calculadora en la vida cotidiana y como resultado, el foco de la enseñanza de la aritmética gradualmente se adecua a la aritmética mental, desarrollándose en forma continua hasta la actualidad.

Los algoritmos tradicionales de cálculo no han sido eliminados desde los programas educacionales. Pero, desde mediados de los años 80 se impusieron cambios como:

1. La reubicación de los **algoritmos** de adición y sustracción un año más tarde que lo habitual, en 4° y no en 3°.
2. El desarrollo gradual del algoritmo base de la multiplicación, desde el cálculo en columna de la multiplicación no siempre llegó a ser reducido a la forma más abreviada.

Es una tendencia internacional dar menor énfasis al algoritmo de cálculo vertical y poner más énfasis en la aritmética mental, sin que haya quedado claramente definida la posición del algoritmo de cálculo en el currículo escolar.

El algoritmo de cálculo de la multiplicación, tradicionalmente considerado como el referente de la educación aritmética, ha sido parcial o a veces completamente sustituido como una destreza básica por el cálculo en columna. Los oponentes al algoritmo de cálculo sostienen que es nula la relevancia so-

cial de esta destreza, debido al uso de la calculadora en el mundo adulto. Los que apoyan el uso del algoritmo, sostienen el valor matemático del proceso de desarrollar algoritmos y el valor que esta destreza puede tener para el individuo, además del valor de preparar para la educación secundaria.

- Investigación sobre la enseñanza de los algoritmos de cálculo

Treffers et al. (2001) identifican los siguientes avances en la investigación en torno a la enseñanza de los algoritmos de la aritmética y en particular de la multiplicación:

- El aprendizaje de algoritmos de cálculo requiere al menos 100 horas de clases. En países donde el cálculo del algoritmo se enfatiza, por ejemplo EE.UU., un año entero de instrucción se dedica a este tema, lo que corresponde a cerca de 200 horas de clases.
- La investigación ha mostrado que una introducción temprana al algoritmo de cálculo y una secuencia extensa forman un obstáculo importante para el desarrollo de la aritmética mental hábil, en una variedad de cálculos; y además, obstaculizan la estimación. Por otro lado, este énfasis en el algoritmo de cálculo crea un bloqueo en relación a las nociones de aritmética elemental.
- El cálculo en columna promueve la aritmética mental y la estimación, en parte debido a la estructura de cálculo que va de lo grande a lo pequeño, proveyendo globalmente el orden de magnitud de la respuesta desde el comienzo del proceso.
- El cálculo en columnas se vincula naturalmente con la aproximación informal que usan los niños. Tras la aritmética mental basada en las estrategias de encadenamiento o de variantes, el cálculo en columnas es una de las principales formas de trabajo que los niños aplican espontáneamente. La enseñanza puede vincularse a esta tendencia y utilizar la estrategia de descomponer en forma ordenada, por escrito, por columnas.
- Los niños pueden aprender el algoritmo basado en la adición procediendo relativamente rápido -en cerca de 5 horas de clases-, después que ellos han comenzado a familiarizarse con la adición en columnas. Esta destreza del cálculo de algoritmo puede también usarse con el cálculo en columnas de la multiplicación.

- A modo de síntesis

Según expertos internacionales en el tema, los estudiantes de 3° y 4° grado debieran ser capaces de resolver problemas sin usar el algoritmo, y los algoritmos debiesen enseñarse tardíamente, por ejemplo, a fines de 4° grado. El trabajo sin algoritmo puede hacerse de varias formas, una de las cuales es el cálculo en columna.

Cálculo en columna

$$\begin{array}{r} \text{a) } 46 \\ 7x \\ \hline 280 \\ 42 \\ \hline 322 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{b) } 46 \\ 7x \\ \hline 42 \\ 28 \\ \hline 322 \end{array}$$

Algoritmo de cálculo

$$\begin{array}{r} \text{c) } 46 \\ 7x \\ \hline 322 \end{array}$$

$$\text{Canjeo 4 y } 7 \times 4 + 4 = 32$$

Dejo un espacio

Los cálculos intermedios frecuentemente se realizan a través de la aritmética mental. En la forma b) los resultados intermedios se escriben hacia abajo y luego se suman según el algoritmo. En c), estos procedimientos han sido condensados en una única operación, la multiplicación basada en algoritmo. El cálculo en c) es más corto, pero no es en esencia diferente al de b). Por esta razón b) es llamado algoritmo de cálculo.

Un resumen de las características del cálculo en columna y del algoritmo de cálculo es el siguiente:

- En el cálculo en columnas se trabaja con los valores de los números enteros y no con los dígitos, además se trabaja de lo grande a lo pequeño, lo que evita la pérdida del sentido.
- Existe actualmente un énfasis en la enseñanza del procedimiento estándar de cálculo por columna.
- El algoritmo de la adición sirve para calcular resultados intermedios (productos parciales) en el algoritmo de la multiplicación.
- Al principio de la enseñanza del procedimiento para multiplicar, el profesor no debe llevar el algoritmo de la multiplicación en su forma abreviada.

Enseñanza de la multiplicación con multidígitos en Japón y en Chile

- *Multiplicación con multidígitos en la Guía de Japón*

En la sección Parte II.2 se analizó la Guía de Enseñanza para segundo grado. A continuación se analizan las especificaciones que ofrece esta Guía para tercer grado con respecto a la multiplicación en Japón:

“En tercer grado se tratan cálculos tales como números de 2 ó 3 cifras multiplicados por números de 1 ó 2 cifras. El objetivo es profundizar la comprensión del significado dónde se usa la multiplicación. En segundo grado se enseñaron casos simples de multiplicación, tales como aquellos en que el multiplicador es el número de personas o el número de objetos concreto. El objetivo en este nivel es ayudar a los niños a entender que la multiplicación aún puede ser usada incluso en problemas referidos a números grandes, tales como un metro de cinta cuesta 85 yenes, ¿Cuánto costarán 25 metros de esa cinta? Además, la multiplicación es enseñada como la inversa de la división, en casos como, cuando una de las cuatro porciones de una cadena dividida en partes iguales tiene 15 centímetros, ¿cuál era el largo de la cadena original?, lo que se relaciona con el cálculo que hace uso de la división. Y los niños son ayudados a poner atención en que la multiplicación es usada para encontrar el dividendo desde el divisor y el cociente. La multiplicación es expandida al caso en que el multiplicador y el multiplicando son ambos a la vez cero, en este caso, aún se puede usar la multiplicación.”

“Cuando se enseña los algoritmos de cálculo, es importante para los niños encontrar cómo calcular en papel o explicar cómo hacerlo basado en el sistema de notación posicional y la tabla de multiplicar. Cuando el multiplicador es un número de dos cifras, es posible ayudar a los niños a pensar basado en lo que ellos ya aprendieron, en este caso en las decenas y en números de una cifra. Al idear multiplicaciones cuyo multiplicador está basado en la multiplicación de grupos de decenas y unidades, es importante estimar el resultado y saber la manera de hacerlo. Esto es, es importante enseñar que el uso de la estimación es conveniente. También en la enseñanza del algoritmo de cálculo, es importante ayudar a los niños a entender en relación con los contenidos ya aprendidos.”

“Con respecto a las propiedades de la multiplicación, en segundo grado, los alumnos aprendieron cómo el producto cambia cuando el multiplicador au-

menta una unidad cada vez, y la propiedad conmutativa. En este nivel, los niños aprenden que las leyes conmutativa y asociativa de la multiplicación pueden ser enseñadas como en la adición. Generalmente expresiones como $axb = bxa$ y $ax(bxc) = (axb)xc$ muestran que es aceptable cambiar el orden en el cálculo de la multiplicación. También es importante para los niños entender que el cambio del producto cuando el multiplicador incrementa en uno, puede expandirse al caso de que el producto disminuye en la cantidad del multiplicando cuando el multiplicador disminuye en uno. También se aprecia que en ese cómputo ha sido usada la propiedad distributiva. Es importante que los niños gradualmente estén conscientes de estas reglas cuando piensen acerca de los cálculos, para explicar y para chequear sus resultados.”

- Multiplicación con multidígitos en los programas chilenos

Para el **primer semestre de cuarto básico** el Programa de Estudio propone ejemplos de actividades para asociar la multiplicación a situaciones correspondientes a un arreglo bidimensional, para ampliar el cálculo mental al caso de la multiplicación por 7 y por 9, para desarrollar habilidades para el cálculo escrito de productos de un número de más de una cifra por otro de una o dos cifras y cálculo escrito de un número por un múltiplo de 10, 100 ó 1000, y para tomar conciencia de que la multiplicación cumple con las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva con respecto a la suma, y la problematización sobre operaciones: pertinencia de resultados y comunicación de procedimientos.

A continuación se exponen algunos de los ejemplos sugeridos en los Programas de Estudio que hacen referencia a arreglos bidimensionales para visualizar la propiedad conmutativa de la multiplicación (Act. 2, Pág. 190):

“• Identifican situaciones que corresponden a arreglos bidimensionales y los asocian con las operaciones de multiplicación y división:

- Marta recibió de regalo una gran caja de chocolate. La caja tenía 4 corridas de chocolate con 6 chocolates en cada corrida. Marta estaba muy contenta porque según sus cálculos tenía 24 chocolates para comerse. ¿Cómo pudo llegar Marta a ese resultado si no contó todos los chocolates? Comentan sus respuestas con los compañeros.

- Camilo carga una caja con 24 bebidas que están dispuestas en 8 corridas. Si al intentar colocarlas sobre una mesa se cayeron las bebidas correspondientes a la primera fila, ¿cuántas bebidas se cayeron? ¿Cuántas quedaron?
- Don Pedro tiene un negocio y ha recibido una caja de mercadería correspondiente a tarros de conserva. Estos tarros están ordenados de manera que hay 10 corridas y en cada corrida hay 5 tarros. Para saber con cuántos tarros de conserva cuenta, él hace el siguiente cálculo 5×10 y la persona que trabaja con él hace el cálculo de 10×5 . ¿Obtuvieron los dos el mismo resultado? ¿Sucedo lo mismo con cualquier multiplicación que se realice?"

"• Guiados por el docente comentan los problemas resueltos y concluyen respecto a que:

- es posible asociar situaciones de "arreglo bidimensional", en que se conoce la cantidad de filas y la cantidad de elementos en cada una de ellas con la operación de multiplicación.
- si se multiplica la cantidad de filas por los elementos de cada fila se obtiene el mismo resultado que si se multiplica la cantidad de elementos por fila por la cantidad de filas.

Esto corresponde a una propiedad de la multiplicación que se denomina "conmutatividad".

Observaciones al docente

A través de esta actividad genérica se desea ampliar el significado de la operación de multiplicación. En este caso se ha hablado de "filas" y "cantidad de elementos de cada fila" los cuales es conveniente definir previamente ya que son arbitrarios. Respecto de la conmutatividad de la multiplicación, es conveniente señalar que si bien aquí se pone de relieve no es necesario insistir tanto en el nombre de esta propiedad, ya que este mismo concepto se trabajará más adelante."

Reflexión:

Dos comentarios con respecto a estos ejemplos de actividad.

Primero: La observación al docente de que la actividad amplía el ámbito de uso de la multiplicación desde la situación de proporcionalidad a la de arreglo

bidimensional no se tiene en cuenta en la Guía de Enseñanza japonesa. Los ejemplos de arreglo bidimensional aparecen en los textos japoneses desde la introducción de la multiplicación aprovechando que ella favorece la visualización de la propiedad conmutativa y de las secuencias aditivas. La Guía de Enseñanza japonesa, en cambio, hace notar que se amplía el ámbito numérico y no sólo se hará referencia a grupos de personas u objetos concretos, sino que se hará referencia a números grandes, como "85x25". El paso de un ámbito numérico a otro levemente mayor es importante para la Guía, pues tiene consecuencias en las representaciones y en las formas de calcular.

Segundo: La propiedad conmutativa es considerada importante en la Guía de Enseñanza japonesa, por lo que es tenida en cuenta ya cuando los niños estudian las tablas del 2 al 5. En la enseñanza de la matemática en Japón, se usa la propiedad conmutativa como estrategia para evocar y verificar productos de las tablas, mientras son aprendidas. En Japón, al igual que lo proponen los Programas de Chile, los textos hacen uso de arreglos bidimensionales para que los alumnos visualicen la conmutatividad.

A continuación se exponen algunos de los ejemplos sugeridos en el Programa de Cuarto Básico para ampliar el cálculo mental al caso de la multiplicación por 9 (Act. 4, Pág. 195):

"• Realizan actividades como las siguientes para memorizar los productos de dígitos por 9:

- Multiplican con la calculadora un dígito por tres; sin borrar, vuelven a multiplicar por tres y anotan el resultado. Multiplican el mismo dígito por nueve. Repiten lo anterior con otros dígitos. Concluyen que la acción de triplicar y triplicar (multiplicar dos veces por tres) es equivalente a la acción de multiplicar por 9.
- Organizados en grupos, contestan, sin usar la calculadora, y estableciendo relaciones con los resultados obtenidos en la actividad anterior, ejercicios como los siguientes: 3×2 y 9×2 ; 3×3 y 9×3 ; 3×4 y 9×4 ; etc.
- Triplican una cantidad sucesivamente, con apoyo en las tarjetas par-impar. Experimentan que triplicar corresponde a tener tres tarjetas de la misma cantidad de puntos, triplicar otra vez corresponde a tener nueve tarjetas de la misma cantidad de puntos. Por lo tanto, el triple del triple de un número equivale a nueve veces

el número. Suman 9 dos veces, tres veces, etc., y asocian cada suma con la multiplicación correspondiente $9 + 9$ como 9×2 ; $9 + 9 + 9$ como 9×3 . Para efectuar las sumas utilizan como estrategia hacerlo de 10 en 10 y luego restar 1 por cada 10 que se emplee. Por ejemplo, $9 + 9$ como $10 + 10 - 2$; $9 + 9 + 9$ como $10 + 10 + 10 - 3$, etc. Comprueban los resultados obtenidos utilizando material concreto y los anotan en su cuaderno.

Responden preguntas como: ¿Cuánto es 4×9 ?, ¿y 9×4 ? Si se suma nueve 5 veces, ¿qué número se obtendrá?, ¿será lo mismo que si se suma 5 nueve veces? Si $9 \times 6 = 54$, ¿cuánto será 6×9 ?

Completan la tabla confeccionada en el semestre anterior, en la que se registran todas las combinaciones multiplicativas aprendidas hasta ahora.

Repasan los productos de un dígito por números del 1 al 10:

- Juegan al "Memorice" con tarjetas que contienen multiplicaciones de dígitos por 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.
- Juegan a competir con la calculadora. Se plantean una multiplicación con cualquiera de las combinaciones de dígitos (por ejemplo, 4×9) y al tiempo que piensan su resultado lo buscan utilizando la calculadora. De esta forma pueden ver qué les resulta más rápido, si con la calculadora o mentalmente."

Reflexión:

Un comentario con respecto a estos ejemplos de actividad.

Las estrategias sugeridas por el Programa de Chile para la memorización de la tabla del 9 hacen referencias a propiedades que no son generalizables a todos los números sino que aprovecha características que tienen asidero en la representación decimal de los números. El aprendizaje de estas estrategias, es posible que no ayuden al proceso de memorización de las tablas, sino, al contrario a una sustitución de esa habilidad básica por habilidades mnemotécnicas que son a la larga menos eficientes que la memorización directa de las tablas. La Guía de Enseñanza japonesa sugiere que el alumno extienda la comprensión de la propiedad "si el multiplicador aumenta en 1, el producto aumenta en el tamaño del multiplicando" a la propiedad "si el multiplicador disminuye en 1, el producto disminuye en el tamaño del multiplicando" y a

la generalización “si el multiplicador aumenta en 2 unidades, el producto aumenta dos veces en el tamaño del multiplicando”, lo que se generaliza en la propiedad distributiva. Los textos y los profesores en Japón usan arreglos bidimensionales para visualizar la propiedad distributiva y con ella deducir, chequear y argumentar productos que les son difíciles de recordar.

A continuación se exponen algunos de los ejemplos sugeridos en los Programas de Estudio de Cuarto Básico que hacen referencia al desarrollo de habilidades para el cálculo mental de productos de un número por un múltiplo de 10 (Act. 4P. 197):

“• Multiplican 1500×500 . Para ello comienzan por descomponer los múltiplos de 10 en un producto de un número por una potencia de 10 (1500 como 15×100 y 500 como 5×100); luego realizan el producto de los números que no son potencias de 10 ($15 \times 5 = 75$) y de las potencias de 10 ($100 \times 100 = 10\,000$), finalmente, multiplican los resultados obtenidos ($75 \times 10\,000 = 750\,000$).

Observaciones al docente

En cuanto a las estrategias de cálculo, se sugiere presentar algunos ejemplos y hacer que sean los propios alumnos quienes busquen qué estrategias les resultan más fáciles y seguras. Posteriormente, que las comenten con sus compañeros como una forma de ponerlas a prueba y de hacer los ajustes que estimen conveniente.”

Reflexión:

Un comentario con respecto a estos ejemplos de actividad.

Llama la atención que los alumnos recién estén aprendiendo 9×3 (multiplicaciones con una cifra) y se les pida calcular mentalmente 1500×500 , sugiriendo que para ello resuelvan (mentalmente) 15×5 y 100×100 , para luego multiplicar ambos resultados. Probablemente esta actividad es difícil para los alumnos de cuarto básico que aun no estudian las multiplicaciones con 2 cifras. La sugerencia provista, de “presentar algunos ejemplos y...” se aleja del enfoque de enseñanza constructivista de la Guía de Enseñanza.

A continuación se exponen ejemplos sugeridos en los Programas de Estudio referidos al desarrollo de habilidades para el cálculo escrito de productos de un número de más de una cifra por otro de una o dos cifras (Act. 5, Pág. 198):

“• Calculan productos correspondientes a situaciones de tipo multipli-

cativo, en que uno de los factores es un número de 1 ó de 2 cifras ó múltiplo de 10, 100 y 1000, utilizando estrategias basadas en la descomposición aditiva de los factores y en la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la adición. Por ejemplo:

- Calculan multiplicaciones en que uno de los factores es un número de una cifra, como 123×8 , utilizando una tabla en la que descomponen el primer factor y van anotando los resultados parciales para finalmente sumarlos y obtener el resultado final.”

$$123 \times 8 \longrightarrow$$

100	20	3	$\times 8$
800	160	24	
984			

- “Calculan multiplicaciones en que uno de los factores es un número de 2 cifras, como 345×24 , utilizando una tabla en la que descomponen cada uno de los factores y van anotando los resultados parciales para finalmente sumarlos y obtener el resultado final.”

$$345 \times 24 \longrightarrow$$

300	40	5	$\times 20$	4
6 000	800	100		
1 200	160	20		
7 200	960	120		
8 280				

“Observaciones al profesor

Apliquen las técnicas descritas para efectuar los cálculos. Ejercitar la descomposición aditiva, de uno o los dos factores, preparándose para el aprendizaje del algoritmo o forma resumida del cálculo del producto.”

Reflexión:

Un comentario con respecto a estos ejemplos de actividad.

Llama la atención que no se destaquen las propiedades involucradas en los cálculos. La Guía de Enseñanza destaca tanto el aprendizaje de las técnicas para calcular como el potencial del alumno para explicar sus cálculos. En este último sentido, menciona que los cálculos se basan en el sistema de posición decimal y en la tabla. Además, hace notar que para multiplicar con dos cifras

se requiere tener presente lo aprendido con respecto a las decenas y los números de una cifra. Destaca la Guía que es importante relacionar el algoritmo con los aprendizajes ya adquiridos, entre ellos las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva.

A continuación se exponen ejemplos sugeridos en los Programas de Estudio referidos a la apropiación de las propiedades conmutativa y distributiva de la multiplicación con respecto a la adición (Act. 6, Págs. 200 y 2001):

“• Exploran si en una multiplicación cambia el resultado al cambiar el orden de los factores:

- Multiplican pares de números en forma oral, cambiando el orden de los factores, por ejemplo 2×3 y 3×2 ; 9×8 y 8×9 ; 30×40 y 40×30 ; 3×100 y 100×3 ; etc.
- Multiplican pares de números en forma escrita, cambiando el orden de los factores. Por ejemplo 23×9 y luego 9×23 ; 123×18 y 18×123 , luego comparan los resultados obtenidos.
- Multiplican pares de números utilizando la calculadora, cambiando el orden en que ingresan los factores. Por ejemplo, 24235×32308 y 32308×24235 .
- Guiados por el docente, sacan conclusiones respecto de los ejercicios realizados y concluyen que en la operación de multiplicación, el resultado no se altera si se cambia el orden de los factores. El docente expresa que esta es una propiedad de la operación de multiplicación que se denomina “conmutatividad”.
- Exploran si en una multiplicación en que uno de los factores es una suma el resultado cambia o no, si en primer lugar se hace la suma y luego se multiplica o si se multiplica cada uno de los sumandos y luego se suman los resultados.
 - Multiplican un número por una suma de otros dos en forma oral. Por ejemplo sumar $2 + 5$ y luego multiplican el resultado por 8. Posteriormente, multiplican 8×2 y 8×5 y suman ambos resultados. Comentan qué fue lo que cambió y qué fue lo que se mantuvo igual en ambos casos.
 - Multiplican un número por una suma de otros dos en forma escrita. Por ejemplo, $12 + 25$ multiplicado por 16 y luego 12×16 y 25×16 y

suman los resultados obtenidos. Pueden trabajar en parejas en que uno de los niños hace una operación y el otro la otra. Comparan los resultados obtenidos.

- Multiplican un número por una suma de otros dos con ayuda de una calculadora. En primer lugar realizan la suma y luego la multiplican por el factor y, en segundo lugar, multiplican el factor por cada sumando y luego suman los productos parciales. Por ejemplo: $25 \times (18 + 36)$ realizando primero la suma $(18 + 36)$ y multiplican el resultado por 25. Posteriormente, multiplican 25×18 y 25×36 y suman los valores obtenidos en cada caso. Comparan los resultados obtenidos en cada caso.

$\begin{array}{r} 291 \\ \times 2 \\ \hline 582 \end{array}$	<p>Por ejemplo, en el caso del 291 por 2, primero se multiplica 2 x 1, luego 2 por 90 y luego 2 por 200. Finalmente se suman todos los productos parciales.</p>
--	---

- Guiados por el docente, sacan conclusiones respecto de los ejercicios realizados y concluyen que para multiplicar un número cualquiera por una suma se puede hacer primero la suma y luego multiplicar o bien multiplicar cada sumando por el factor correspondiente y luego sumar ambos resultados. El docente expresa que esta es una propiedad de la operación de multiplicación en relación con la adición, que se denomina “distributividad” y pide a los alumnos y alumnas que busquen esta palabra en el diccionario y vean si coincide con la propiedad que acaban de conocer. Comentan los resultados obtenidos.”

“Observaciones al docente

Reflexionen sobre algunas propiedades, en el cálculo mental y escrito. Es importante que sistematicen sus conocimientos, se apropien de las propiedades y adquieren confianza en que funcionan.”

Reflexión:

Llama la atención que se concluya la generalización de las propiedades en virtud de su validez en casos particulares. Puesto que ello no es aceptado en el desarrollo de la matemática. Habría sido más convincente una generalización

a partir de la visualización con tarjetas o la misma noción inductiva " $ax(b+1) = axb + a$ ". La Guía de Enseñanza japonesa se limita a extender las propiedades a ámbitos numéricos restringidos, como las unidades, decenas y centenas, de modo que los alumnos dispongan de mecanismos de representación.

Para el **segundo semestre de cuarto básico** el Programa de Estudio propone ejemplos de actividades referidos a problemas que implican la combinación de multiplicaciones y otras operaciones, a la profundización de las estrategias de cálculo mental de productos, al cálculo escrito de productos con uno de los factores de una o dos cifras o múltiplos de 10, 100 ó 1000, a través de un procedimiento resumido y al estudio comparativo de las cuatro operaciones desde el punto de vista de sus propiedades.

A continuación se expone un ejemplo que hace referencia al cálculo escrito de productos con un factor de una cifra (Act. 1, Págs. 240-1):

“• Calculan en forma escrita productos correspondientes a situaciones de tipo multiplicativo, aplicando un procedimiento resumido.

Observaciones al docente

En esta actividad se introduce un procedimiento resumido para la multiplicación en el que se promueve el uso de las combinaciones multiplicativas ya conocidas y la aplicación de la descomposición aditiva y multiplicativa y la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición. No es necesario que los niños y niñas se aprendan todos los procedimientos que conozcan, sino que elijan aquél que les resulte más fácil.”

Reflexión:

Un comentario con respecto al ejemplo de actividad.

La actividad supone que el profesor o bien un familiar o el texto le da a conocer al alumno el procedimiento y el alumno lo adopta en la medida que le es útil. Este enfoque difiere al presentado en la Guía Enseñanza que sostiene que es importante para los niños encontrar cómo calcular en papel o explicar cómo hacerlo basado en el sistema de notación posicional y la tabla de multiplicar. Además, señala que es importante que el alumno estime el resultado y sepa la manera de hacerlo. Por lo mismo, señala que es importante enseñar al alumno el uso de estimación. La Guía también señala que en la enseñanza del

algoritmo de cálculo, es importante ayudar a los niños a entender la relación entre el algoritmo y los conocimientos ya aprendidos.

En la **tercera unidad del Programa de Estudio de Quinto Básico** se propone ejemplos de actividades en las que los alumnos asocian multiplicaciones a situaciones correspondientes a una relación de proporcionalidad compleja y a situaciones correspondientes a producto cartesiano y combinaciones. Además, se presentan ejemplos de actividades de redondeo de números como estrategia para el cálculo aproximado de productos con uno de los factores mayor que 100 y ejemplos de utilización de la calculadora para determinar productos en la resolución de problemas

A continuación se exponen ejemplos de actividades que hacen referencia a una situación correspondiente a una relación de proporcionalidad compleja, y una situación correspondiente a combinaciones (Act. 5, Pág. 48):

“• Leen y comentan: “Un paquete oferta con dos yogures vale \$250”. Construyen una tabla de valores para responder las siguientes preguntas: ¿Cuánto valen 12 yogures? ¿Cuánto valen 48 yogures? ¿Cuántos yogures puedo comprar con \$2.000?”

• Leen y comentan la siguiente pregunta: ¿cuántas tortas diferentes se podrían elaborar con 2 tipos de masa, 3 tipos de relleno y 2 tipos de cobertura? Se sabe que en cada torta se ocupa sólo uno de cada tipo de elementos. Buscan una manera de representarla gráficamente.

• Comparten y discuten sus procedimientos y resultados. Buscan otras situaciones de este tipo que puedan observar.”

Reflexión:

Un comentario con respecto a los ejemplos de actividad.

Las actividades muestran el foco permanente de los Programas de Estudio de Chile que se orientan a la resolución de problemas. Pero se trata de problemas de aplicación, no de problemas en los que el alumno debe idear el procedimiento de solución. En este sentido difiere del enfoque de las clases de matemáticas de Japón, aunque es consistente con el punto de vista tradicional que valora una educación matemática práctica para que los sujetos respondan a problemas cotidianos.

Estudio de una clase en la que se enseña la forma de calcular una multiplicación

- Descripción general de la clase

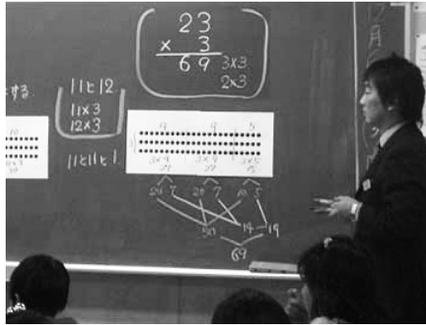
Se trata de una clase impartida en Japón por el profesor Hideyuki Muramoto con la ayuda de Kazuyoshi Okubo (Muramoto y Okubo, 2007), en 3° grado sobre el Algoritmo de la Multiplicación, que fue filmada en vídeo para el Proyecto APEC EDNET llamado "Innovaciones en la Sala de Clases a través del Estudio de Clases". El CRICED, Universidad de Tsukuba, posee el copyright del Plan de Clase y del vídeo completo de la clase. El vídeo completo de la clase fue dirigido por Masami Isoda y la Lista de Episodios y de clips fue desarrollada por David Tall (Tall e Isoda, 2007). El plan de clase y el vídeo completo de la clase están disponibles en el DVD adjunto a este libro.

La clase es un ejemplo de uso del proceso de Estudio de Clases para la enseñanza de las matemáticas. Esta clase de investigación de 50 minutos fue presentada en la Escuela Primaria de Maruyama de la ciudad de Sapporo, para un curso de 40 estudiantes. Es la cuarta de una secuencia de 13 sesiones. La clase previa consideró el producto 20 por 3 y se animó a los niños a calcular el número de círculos negros en el arreglo de abajo. En la figura el total es (10 por 3) más (10 por 3), que es $30+30$, lo que da 60.



La clase está planificada en detalle en el Plan de Clase (Pág. 170) y en ella se anima a los niños a utilizar su conocimiento previo para resolver el problema de calcular cuántos círculos hay en un nuevo arreglo (en el cual encontrarán 23 veces 3). El plan es encontrar diversos métodos para hacerlo, considerando cuáles son complicados y cuáles son más fáciles y, si algún niño sugiere la multiplicación por columna, conectar ello con las actividades de ejercitación. La meta a largo plazo es hacer a los niños conscientes de las ventajas de construir la multiplicación por columna desde una experiencia significativa relacionada con ejemplos prácticos.

Al observar el video, nótese cómo el profesor comienza en el lado izquierdo de la pizarra con el problema, prepara el desarrollo de la clase, encerrando en color amarillo los puntos importantes, de modo que la estructura de la clase completa sea vista sobre la pizarra al final de la clase.



El propósito de esta clase es ayudar a los estudiantes a pensar en cómo multiplicar números de 2 cifras por números de 1 cifra. Apenas ellos observan la frase matemática (es decir, 23×3), muchos sienten que el problema no puede resolverse usando las tablas de multiplicar. Si los estudiantes pueden ver la estructura del problema con un diagrama de arreglos, entonces se dan cuenta que pueden calcular este problema usando resultados de la multiplicación que ya aprendieron. “Deseo cerciorarme que los estudiantes puedan ver que pueden utilizar la idea de cuántas veces una cantidad contiene una cantidad unitaria también en este caso”, señala el profesor Muramoto.

En esta clase, los estudiantes descompondrán el número de dos cifras en números que sean fáciles de usar con las tablas de multiplicar. A través de esta investigación, los estudiantes realizarán la descomposición de un número de dos cifras, en decenas y unidades (es decir, 23 en 20 y 3) para hacer el cálculo. Además, aprenderán que esta idea es la base para el proceso del algoritmo de la multiplicación (método de cálculo con lápiz y papel).

Un punto importante de esta clase es que los estudiantes investiguen cómo descomponer el número 23 de modo que ellos puedan usar el conocimiento aprendido anteriormente. Es importante que los estudiantes entiendan la descomposición de 23 en 20 y 3, para que entiendan el mecanismo del algoritmo. En esta clase, sin embargo, el profesor quiere que los estudiantes observen un diagrama de arreglos para descomponer el número de 2 cifras de modo que puedan utilizar la tabla de multiplicar para calcular.

- Génesis de este plan de clases

Aprendiendo entre sí y poniendo atención al proceso de solución. “Desde

principios del año escolar (abril de 2006), he enseñado a los estudiantes a dibujar un diagrama de la situación problema para pensar en la solución. Además, he enfatizado la importancia del aprendizaje matemático en clase así que los estudiantes pueden usar el diagrama para explicar sus procesos de pensamiento lógico.

Hay algunos estudiantes en la clase quienes ya saben cómo multiplicar usando el algoritmo. Aunque, muchos de ellos ya saben el procedimiento del cálculo, no es claro si ellos realmente entienden el mecanismo del cálculo. Los estudiantes pueden entenderlo, sin embargo, mirando un diagrama arreglos, reconocen el significado y el valor de descomponer el número de 2 dígitos para calcular, y de generalizar la idea de "cuántas veces una cantidad contiene una cantidad unitaria".

La solución al problema 23×3 es siempre 69 independiente de cómo se descomponga el número 23 para hacer el cálculo. Los estudiantes se darán cuenta cómo diversas ideas para hacer el cálculo pueden utilizarse, aprendiendo entre ellos en la sala de clases.

Los estudiantes dudosos o que experimentan dificultad con la multiplicación de 2 cifras pueden no ser capaces de llegar a la idea de descomponer el número 2 cifras y en lugar de ello pueden usar la adición ($23 + 23 + 23 = 69$). Aprendiendo entre sí en la sala de clase y exponiendo las diversas ideas, no obstante, pueden comenzar a pensar, "si descompongo 23, me pregunto si el cálculo será más fácil..."

Un diagrama de arreglo que muestre cómo el número 23 fue descompuesto de diversas formas y las frases matemáticas que van con cada método diferente, ayudará a estos estudiantes a comparar ideas y a pensar en un método mejor."

- Descripción y análisis de los episodios de la clase

A continuación se describen los siete episodios principales de la clase.

Descripción del contenido de cada uno de los episodios principales de la clase (accesibles en los videos del DVD)	Identificación de los episodios en video clip
En esta clase, el Sr. Muramoto introduce el nuevo problema, los niños intentan predecir cuál es, basados en su experiencia previa. El problema se presenta en el video clip y, al final los niños esperan una copia del problema para calcular el número requerido.	El Problema (video 1 de 7): Inicio 01:58, duración 1:20
Después de establecer el problema de calcular 23×3 , el Sr. Muramoto anima a los niños a trabajar por sí mismos, luego, recorre la sala mientras trabajan por cerca de cinco minutos. Él nota quién ha terminado y quién no, y luego invita a los niños para que expliquen sus ideas. Inicialmente todas las ideas se relacionan con la subdivisión de 23 en 20 más 3 ó 10 más 10 más 3. El video clip muestra la primera respuesta.	Alumno Amon ve 23 como 20+3 (video 2 de 7): Inicio 16:45, duración 2:18
Cada respuesta es acogida con la aprobación, excepto posiblemente un niño, quien ve el arreglo completo como $30+30+9$. Aunque él ha "visto" el problema completo como dos sub arreglos de "3 filas de 10" que son 30 y un sub arreglo de 3 filas de 3 que son 9. El profesor le explica con tranquilidad que él no ha acabado todavía y debe escribirlo abajo en su cuaderno.	Amano 'no ha terminado' (video 3 de 7): Inicio 21:56, duración 1:01
Una respuesta sugiere que el 2 en 23 se puede considerar como 2 monedas de diez Yenes.	Usando monedas de 10 yenes (video 4 de 7): Inicio 25:18, duración 2:00
Después de unos diecisiete minutos dedicados a los ejemplos de repartir 23 en 20, 3 ó 10, 10, 3, un niño sugiere que nadie ha propuesto algo diferente.	Note algo (video 5 de 7) Inicio 33:53, duración 1:02
Después de esta intervención, se sugieren diversas posibilidades, incluyendo $11+12$, $9+9+5$ y $11+11+1$. El profesor anima a niños que hablen entre ellos. El clip muestra la complicación de la subdivisión en $9+9+5$.	3×9 , 3×9 , 3×5 (video 6 de 7): Inicio 38:13, duración 2:15
El profesor ha encontrado que algunos niños utilizaron la forma vertical estándar de presentar el problema. En el clip, él anima a uno de ellos que explique su idea. Después él enlaza la forma vertical a los otros métodos usando láminas y pone una lámina de la suma vertical para la comparación directa. Tras el episodio mostrado, hay una sesión minuciosa de 5 minutos que resume la clase, en la cual Sr. Muramoto consigue que los niños lean el propósito de la clase desde la pizarra y sugieran frases para describir la clase. La pizarra completa presenta de izquierda a derecha las ideas principales de la clase permitiendo a los niños considerar la discusión completa y hacer sus propias notas.	Forma vertical (video 7 de 7): Inicio 42:08, duración 4:02

La tabla anterior muestra 8 episodios destacados. La tabla siguiente hace referencia a la identificación de una secuencia de 40 episodios. A cada episodio se le asocia una ubicación en la secuencia, una duración, un nombre que lo identifica (además de: introducción al problema, actividad de la clase, discusión, resumen) y una breve referencia al contenido del episodio.

Algoritmo de la Multiplicación 3° Grado. Profesor: Hideyuki Muramoto Dic. 6, 2006, 1:35 - 2:20 p.m. Escuela Elemental Maruyama de la Ciudad de Sapporo		
Tiempo	Largo	Episodio
00:15.8	01:35.6	INTRODUCCIÓN [8 min. 36 seg.] El profesor comienza escribiendo el problema para que los niños lo copien en sus cuadernos. Note que los niños conocen el formato: se da un problema en la pizarra y esperan copias para hacer los cálculos por sí mismos.
02:21.6	01:28.1	El Problema ¿Cuántos círculos hay aquí? Mostrando los círculos fila por fila los niños tantean cuantos hay (a menudo basándose en la clase previa con 20 círculos en cada fila, antes de darse cuenta que hay 23).
03:19.5	01:56.9	Distribución de las hojas
05:16.4	00:06.6	Encontrar por cálculo (suma o conteo)
05:23.0	00:27.3	23 círculos
05:50.3	00:22.4	¿Cuántos hay en la fila superior?
06:12.7	02:40.6	¿El siguiente?
08:53.3	00:38.6	ACTIVIDAD DE LA CLASE [5 min. 13 seg.] Pensar en cómo calcular 23×3 .
09:31.9	04:34.6	[Actividad de la Clase]
14:06.5	01:48.3	DISCUSIÓN [primera mitad: 17 min. 39 seg.] El profesor comienza la discusión sugiriendo que no pueden calcular 23×3 usando las ideas aprendidas antes.
16:44.9	00:50.3	¿Quién lo ha anotado? El profesor primero chequea cuáles niños lo han escrito, quiénes saben cómo hacerlo y quiénes aun no tienen ideas.
19:04.20	02:19.2	El alumno Amon ve 23 como $20+3$ basado en dividir en 20 y 3. El profesor escribe $3 \times 3=9$, $20 \times 3=60$, $9+6=69$, corregido (según lo observado abajo) de $9+60=69$.
19:51.5	00:47.3	23×3 es complicado. Shinjo presenta la misma idea.
20:41.0	00:49.5	Mi idea quizás es la misma. Otra niña hace lo mismo, 3×3 es 9 y 20×3 es 6 (corregido a 60).
21:24.7	00:43.7	Uso lo que aprendimos. Otra niña explica cómo ella usó lo aprendido en la clase previa.
21:40.7	00:31.2	Decenas y Unidades. La niña explica en términos de lugares de las unidades y de las decenas.
21:56.9	01:10.5	Amano "no termino" (Amano ve la disposición como 9, 30, 30. El profesor le habla suavemente y no lo hace público).
23:06.4	02:12.1	Chiba es similar a Amano pero incurre en un error, divide 23 en 20 y 3, multiplica 3×3 y suma 20 obteniendo 29. Otros niños discuten.
25:18.5	02:00.7	Usando monedas de 10 yenes vuelven a dividir 23 en 20 y 3, pero ahora explica 20 como 2 monedas de 10 yenes, así 2×3 es 6.

27:19.2	01:34.2	2 grupos de 10, uno de uno (El profesor divide la lámina en filas de 10, 10 y 3, y escribe como explican los niños): $10 \times 3 = 30$, $10 \times 3 = 30$, $30 \times 2 = 60$, $3 \times 3 = 9$, $60 + 9 = 69$.
28:53.4	00:34.1	Dígame por qué (otro niño explica lo fácil de hacer grupos de 10. El libro dice eso).
29:27.5	01:21.6	¿Quién tiene la misma idea? (Otro da una explicación similar).
30:49.1	00:56.4	20×3 es más fácil. Yo sé algo. La multiplicación por 10 es más fácil.
31:45.5	01:42.4	OTRO MÉTODO [14 min. 27 seg.] Un niño sugiere una nueva distribución, dividir 23 en $10 + 3 + 10$ con 3×3 en el medio. Suspiros de asombro en la sala.
33:27.9	00:25.3	Ahora usa 10 y 5. Una niña vuelve a los cálculos de ayer de 20×3 . Los cuáles todavía se exhiben a un lado.
33:53.2	01:02.6	Noto algo. Un niño sugiere que todos los métodos concluyen con 60 y 9; ninguno calcula 39 y 30.
34:55.8	00:54.6	23×3 es complicado. Como dijimos antes 23×3 es muy complicado y confuso. Hemos aprendido a calcular 20×3 , números que terminan en cero.
35:50.4	01:01.1	23×3 no termina en 0. Un niño explica que es así porque dividimos 23 en 20 y 3 ó 10, 10 y 3.
36:51.5	00:07.9	¿Un camino diferente? El profesor pregunta si alguien ha dividido en una forma diferente.
36:59.4	01:13.6	$11 + 12$. Un niño dice que dividió 23 en 11 y 3 para calcular 11×3 y 12×3 . El profesor dice "no hemos estudiado eso todavía". Los niños hablan acerca de la dificultad de ello.
38:13.0	02:18.1	3×9 , 3×9 , 3×5 . El profesor escribe los cálculos de los niños sobre la pizarra en una forma compleja. El profesor aprueba y pregunta si son similares a los otros cálculos.
40:31.1	01:37.3	23 es 11, 11 y 1. Un niño realiza un cálculo con un pequeño error, el cual es corregido.
42:08.4	01:37.4	Forma vertical. El profesor nota que Mai escribe el problema en forma vertical usando el algoritmo estándar. Le pide a ella que comparta su idea. Hay discusión acerca de las decenas y las unidades, con cierto uso de la idea de monedas de 10 yenes.
43:45.8	01:43.6	¿Es totalmente diferente? Yamada habla sobre la relación entre la lámina y el cálculo de 3×3 es 9 y 3×20 es 60. En particular, él se centra en que 3×2 que es 3×20 con la respuesta en el lugar de las decenas. El profesor explica en términos de monedas de 10 yenes.
45:29.4	00:43.5	Mirando cuidadosamente. El profesor toma el papel con cálculos usando filas de círculos en forma vertical.
46:12.9	00:07.2	RESUMEN [5min] Se acaba el tiempo. Un niño dice "¡deseo hacer más!"
46:20.1	02:08.3	¿Alguna idea buena? Takashi piensa que es bueno pensar en 2 monedas de 10 yenes. Explica que algunas personas usan números como el 60 y suman números no redondeados (en el lugar de las unidades). Los números redondeados que terminan en cero. Tsubota amplía la idea.
48:28.4	00:23.8	Leamos. El profesor pide a los niños que lean lo que han escrito en la pizarra. "Pensamos en cómo calcular 23×3 ".
48:52.2	02:20.4	¿Qué debemos escribir? El profesor anima a los niños que digan qué escribir. Él toma la frase "la forma del cálculo vertical" y escribe una frase seleccionada de las sugerencias de los niños para acabar la clase.
50:36.50	01:35.6	FIN y CRÉDITOS

- Criterios para evaluar la clase

Para fomentar la capacidad de pensamiento lógico de los estudiantes, el profesor Muramoto prestará atención a los siguientes puntos y ayudará a los estudiantes a reconocerlos individualmente y como curso completo.

- ¿Los estudiantes utilizan diagramas para entender la situación problema?
- ¿Pueden los estudiantes mostrar su propio pensamiento usando los diagramas?
- ¿Pueden reflexionar, justificar, o analizar sus pensamientos usando diagramas?
- ¿Pueden expresar su pensamiento o proceso de pensamiento usando palabras como “porque...”, “por lo tanto...”, “por ejemplo...”, “si esto es...entonces...”, y “mientras ... entonces”?
- ¿Qué punto de vista tienen los estudiantes para comparar las diversas ideas?
- ¿Qué tan diferentes son las respuestas?
- ¿Qué tan diferentes son las expresiones?
- ¿Cuáles razones están detrás de su pensamiento?
- ¿Qué tanto usa su conocimiento previo?
- ¿Pueden reconocer el valor de comparar pensamientos distintos y valorar las nuevas preguntas que resultan desde esta comparación?
- ¿Pueden relacionar sus pensamientos al problema en discusión?

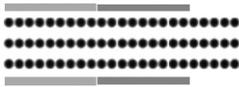
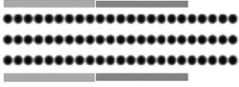
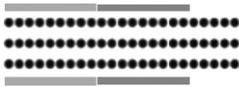
- Plan de la clase 4 de la secuencia de 13 sesiones

Tema de la clase:

Clase de matemática de 3° grado que fomenta la capacidad de los estudiantes de utilizar lo que aprendieron previamente y hacer conexiones para resolver problemas en nuevas situaciones de aprendizaje.

Aprendizaje de la clase:

Ser capaces de pensar en cómo realizar el cálculo de “un número de 2 cifras” por “un número de 1 cifra” usando lo aprendido anteriormente sobre la multiplicación (Pensamiento Matemático).

Actividades de aprendizaje y reacciones y pensamientos anticipados de los estudiantes	Puntos a Considerar
 <p>¿Cuántos • hay? ¡Descubrámoslo por el cálculo!</p> <p>Hay 23 círculos en cada fila. Hay 3 grupos de 23 círculos. Hay más de 60 círculos. Podemos descubrir el número de círculos por conteo o por adición. Me pregunto si podemos usar lo que hemos aprendido antes sobre multiplicación. La frase matemática debe ser 23×3. No podemos usar simplemente las tablas de multiplicar para hacer el cálculo. ¿Que deberíamos hacer?</p>  <p>Dividir 23 en 9, 9, y 5 $9 \times 3 = 27$ $9 \times 3 = 27$ $5 \times 3 = 15$ $27 + 27 + 15 = 69$, 69 círculos</p>  <p>Dividir 23 en 10, 10, y 3 $10 \times 3 = 30$ $10 \times 3 = 30$ $3 \times 3 = 9$ $30 + 30 + 9 = 69$, 69 círculos</p>  <p>Dividir 23 en 20 y 3 $20 \times 3 = 60$ $3 \times 3 = 9$, $60 + 9 = 69$, 69 círculos</p> <p>Si dividimos 23 en partes más pequeñas, podemos usar diferentes multiplicaciones desde la tabla de multiplicar para hacer los cálculos. ¿Cuál de éstas piensas que es una buena idea? ¿Cuáles son las semejanzas o diferencias entre las diferentes soluciones? Todos los métodos decidieron dividir 23 en partes más pequeñas. Hay métodos que implican dividir 23 en 3 partes y en 2 partes. Los números usados en las frases matemáticas son diferentes. Si usamos la multiplicación 20×3 que aprendimos previamente, tenemos dos frases matemáticas. Uso un algoritmo (cálculo con papel y lápiz) para hacer el cálculo 23×3. Si comparamos este método y el diagrama de arreglo. Este método también divide 23 en 20 y 3. Si dividimos un número en pequeñas partes, entonces podemos usar la tabla de multiplicar, haciendo el cálculo en el problema del día de hoy. La idea que utilizamos en el algoritmo (cálculo con papel y lápiz) es similar a la idea de dividir 23 en 20 (2 en el lugar de las decenas) y 3 (3 en el lugar de las unidades).</p>	<p>Para entender la tarea, ayude a los estudiantes a ver los círculos como "cuántos en un grupo" y "cuántos grupos". Antes de calcular anime a los estudiantes a estimar la respuesta. Alabe cuando recuerden lo que ya aprendieron. Intente entender las diversas ideas de los estudiantes caminando por la sala. Cuando encuentre a estudiantes solucionando el problema con la adición, pregúnteles, "¿puedes utilizar la multiplicación para hacer este cálculo?" Asegúrese de usar los diagramas para representar cómo se hicieron los cálculos. Cuando los estudiantes aprendan con otros métodos de cálculo desde las presentaciones de otros estudiantes, asegúrese que consideren cómo se relacionan los métodos. Asegúrese de animar a los estudiantes para que comparen las diversas ideas y ayúdeles a hacer un esfuerzo consciente para tener sus propios juicios de valor respecto a las diferentes ideas. Si un niño utiliza un algoritmo para calcular, pídale que piense cómo ese método de cálculo se relaciona con el diagrama de arreglos. Asegúrese de destacar la idea de "hacer el cálculo más fácil usando la tabla de multiplicar y otras formas de multiplicación que han aprendido antes". Si un niño usa el algoritmo, ayúdarle a conectar conscientemente esa idea a esta idea.</p>

- Planificación de las 13 sesiones de la Unidad

Actividades de Aprendizaje				
1	 <p>¿Cuántos • hay? ¡Descubrámoslo por el cálculo!</p> <p>Porque tenemos 3 grupos de 20 círculos, me pregunto si puedo usar la multiplicación. Para hacer el cálculo 20×3, $20+20+20$ ó 20 son dos decenas. Podemos descubrir cuantas decenas hay usando 2×3.</p>			
2	<p>2</p> <p>Pensemos en el enunciado del problema que muestra la frase matemática 20×3. "Cada chocolate cuesta 20 yenes. Compramos tres. ¿Cuál es el precio total?"</p>			
3	<p>3</p> <p>Si el precio de un ítem es 300 yenes, ¿cuál es la frase matemática? 300×3. Esta vez podemos pensar en cuántos grupos de 100 hay. Podemos descubrir cuántas centenas hay usando 3×5.</p>			
4	 <p>¿Cuántos • hay? ¡Descubrámoslo por el cálculo! Esta vez un grupo tiene 23 círculos. Aproximadamente son 60 círculos.</p> <p>La frase matemática debiese ser 23×3. No podemos calcular fácilmente usando la tabla de multiplicar. Si dividimos 23 en partes más pequeñas entonces podríamos usar la tabla de multiplicar. Podemos usar un algoritmo (método de cálculo con papel y lápiz) para calcular. 9×3, 9×3, 5×3 Juntos, dan 69. 10×3, 10×3, 3×3 Juntos, dan 69. 20×3, 3×3 Juntos, dan 69. ¿Cuál de estas ideas es más fácil calcular? Todas las ideas dividen 23 en partes más pequeñas.</p>			
5	<p>5</p> <p>Descubramos cómo calcular usando el algoritmo (método de cálculo con papel y lápiz). Pensemos el 23 como 20 y 3. Poner juntos 3×3 y 20×3. Hacemos el cálculo usando las tablas de multiplicar.</p> <table style="float: right; margin-left: 20px;"> <tr><td>23</td></tr> <tr><td>$\times 3$</td></tr> <tr><td>69</td></tr> </table>	23	$\times 3$	69
23				
$\times 3$				
69				
6	<p>6</p> <p>¿Cuántos • hay? ¡Descubrámoslo por el cálculo! La frase matemática es 16×4. Debe ser mayor que 40. Parece ser más que 40. Podemos hacer este cálculo dividiendo 16 en 10 y 6 como lo hicimos antes. Hagamos este cálculo usando el algoritmo. $6 \times 4 = 24$ No podemos escribir 24 en el lugar de las unidades. Me pregunto cómo debo escribir el número... Podemos escribir el 2 del 24 en el lugar de las decenas.</p>			
7	<p>7</p> <p>¡Hagamos muchos problemas del tipo ••x•! Pensemos todos los problemas usando el algoritmo. Algunas de las respuestas dan números de 3 cifras. Existen respuestas donde en el lugar de las decenas da 0. Hay problemas que implican reagrupar dos veces.</p>			
8	<p>8</p> <p>El precio de 1 metro de cinta es 312 yenes. Compramos 3 m de cinta. ¿Cuánto costó la cinta? ¿Cuál sería la respuesta estimada? Debería ser más de 900 yenes. La frase matemática es 312×3. Me pregunto si puedo usar el algoritmo otra vez para este... Si dividimos 312 en pequeñas partes, podemos hacer el cálculo... 300×3 10×3 2×3 Juntos, da 936.</p>			
9	<p>9</p> <p>¡Hagamos muchos problemas de ••x•! Hago un problema donde la respuesta da un número de 4 cifras. Hago un problema que implica reagrupar.</p>			
10	<p>10</p> <p>¡Practiquemos calculando con el algoritmo!</p>			
11	<p>11</p> <p>Podemos comenzar a calcular de cualquier manera. El precio de un queque es 60 yenes. Hay 4 queques en cada caja. Si compramos dos cajas, ¿cuál será el precio total? Pienso que necesitaremos dos frases matemáticas para resolver este problema. Primero, encontraremos el precio de una caja. $60 \times 4 = 240$ Tenemos dos cajas de 240 yenes, $240 \times 2 = 480$. Primero, encontramos el número total de queques, $4 \times 2 = 8$ Un queque vale 60 yenes, así $60 \times 8 = 480$.</p>			
12	<p>12</p> <p>¡Practiquemos!</p>			
13	<p>13</p> <p>Revisemos lo que hemos aprendido en esta Unidad.</p>			

- **Metas de la unidad**

Los profesores pretenden llevar adelante:

- Clases que capaciten a los estudiantes a pensar conscientemente acerca de la conexión entre lo que aprendieron antes y lo que están aprendiendo ahora.
- Clases en las cuales los estudiantes aprenden entre sí y que los ayude a pensar conscientemente acerca de sus propios procesos de resolución.
- Una evaluación que ayude a potenciar las capacidades de pensamiento lógico de los estudiantes.

Metas específicas de la Unidad:

- Tratar de pensar sobre cómo calcular la multiplicación de números de 2 ó 3 cifras por 1 cifra usando las ideas sobre la multiplicación que aprendieron previamente (cálculos con números de 2 ó 3 cifras por 1 cifra utilizando la idea de descomposición de números en sistema decimal, de base 10).
- Ser capaces de hacer el cálculo de números de 2 ó 3 cifras por 1 cifra usando el algoritmo.

Contenidos que los estudiantes aprendieron antes de esta unidad:

- Multiplicación de 1 cifra por una cifra (2° grado).
- Multiplicación que involucra el cero, multiplicación por decenas (3° grado).
- Usar la idea de propiedad distributiva de la multiplicación para crear la tabla de multiplicar (es decir, la tabla de multiplicar del 7 puede desarrollarse usando las tablas del 5 y del 2).

La visión del grupo de Maruyama

La presente sección esboza el pensamiento de los profesores de Maruyama. Se trata de una descripción de las concepciones que manejan estos profesores acerca de la importancia de la enseñanza de la matemática y de su contribución al desarrollo de los alumnos.

- Elementos relevantes de la visión del grupo de Maruyama

Metas del grupo de Matemáticas de Maruyama

Las metas del grupo de matemáticas son los objetivos de la aritmética (matemáticas elementales de 1° a 6° grado), esto es:

- Desarrollar aprendizaje con conexiones claras y sistemáticas de los contenidos.
- “Ayudar a los niños a adquirir conocimiento básico y destrezas técnicas respecto a números, cantidades, y figuras geométricas a través de actividades matemáticas; fomentar la capacidad de pensar creativa y lógicamente; y fomentar la actitud para gozar la actividad y apreciar el valor de la manipulación matemática, y hacer uso de ella en la vida diaria”.

El estado real de los estudiantes en Maruyama

Cuando analizamos los puntajes de la prueba de logros de los estudiantes en nuestra escuela, encontramos que nuestros estudiantes están sobre los puntajes del promedio nacional en cada dominio de la aritmética, pese a que la caída de los logros de los estudiantes en el contexto internacional se ha convertido en un tópico de discusión en Japón.

La cuestión clave en Maruyama

Aunque los estudiantes en Maruyama parecen hacerlo bien, según lo señalado arriba, sentimos que hay muchos estudiantes que esperan recibir instrucciones sobre cómo solucionar los problemas en vez de abordarlos.

Pensamos que no hay muchos estudiantes que demuestren un fuerte deseo de abordar problemas desafiantes diciendo “deseo resolver este problema por mí mismo, incluso si me toma mucho tiempo”. Así también, no hay muchos estudiantes que gocen resolviendo problemas por ensayo y error.

Creemos que ello es el resultado de clases que no han proporcionado experiencias agradables en las cuales los estudiantes alcancen soluciones por sí mismos, vean regularidades o patrones interesantes en las investigaciones, y piensen en ello y compartan preguntas con sus compañeros de clase que surjan desde el aprendizaje.

Para desarrollar estudiantes que puedan disfrutar del aprendizaje matemático y adquirir capacidades de pensamiento lógico que están establecidas en

el curso del estudio, decidimos desarrollar clases con los siguientes puntos de vista.

- Los puntos de vista del grupo de Maruyama

¿Qué tipo de clases desarrollan estudiantes que pueden utilizar lo que aprendieron antes para resolver problemas en nuevas situaciones de aprendizaje haciendo conexiones?

Contenido del tema

Creemos que fomentar la resolución de problemas a través de actividades matemáticas nos ayudará a alcanzar este objetivo.

Creemos que los profesores necesitan más claridad acerca de cómo los tópicos de estudio están conectados unos con otros. Necesitamos pensar sobre “cómo los estudiantes pueden utilizar el contenido previamente aprendido para resolver problemas en nuevas situaciones” o “cómo diversas situaciones de resolución de problemas requieren diversas formas de aprendizaje previo”, e incorporar estas ideas en el desarrollo de unidades y de clases.

Ayudar a los estudiantes a ser más conscientes del proceso de su propia resolución.

Creemos que los estudiantes deben ser más conscientes de sus propios procesos de resolución, ser capaces de articular cómo hicieron una conexión entre el aprendizaje previo, y cómo utilizaron la idea para resolver problemas en nuevas situaciones.

Los estudiantes adquieren la capacidad de pensar sobre sus propios diagramas y recta numerada, reflexionando sobre sus propios procesos de resolución, determinando lo que entienden y lo que no entienden, y comparando su resolución con las de sus compañeros.

Creemos que los estudiantes no deben centrarse solamente en la exactitud o la inexactitud de sus respuestas, sino deben también reflexionar sobre sus propios procesos de resolución y entender que es importante sentir el disfrute verdadero del aprendizaje matemático además de conseguir respuestas correctas o incorrectas.

Pensar en evaluaciones que ayuden a los estudiantes a ser más precisos en el proceso de resolución.

Necesitamos pensar sobre cuáles puntos prestar atención para evaluar el aprendizaje del estudiante en orden a ayudarlos a desarrollar el **“pensamiento matemático”** necesario para realizar actividades de resolución de problemas significativas y efectivas.

Importantes puntos de vistas del Grupo de Matemáticas

Considerando el estado real del aprendizaje de los estudiantes de Maruyama y el contenido del tema citado, pensamos que es importante desarrollar unidades y clases con los siguientes tres puntos de vista en orden a lograr el objetivo general “desarrollar estudiantes que puedan usar lo que han aprendido antes para resolver problemas en nuevas situaciones de aprendizaje haciendo conexiones”.

Punto de Vista 1

“Desarrollar material de instrucción que preste atención a las conexiones entre el contenido previamente aprendido y el nuevo contenido.”

Es importante clarificar el pensamiento matemático que los estudiantes han aprendido en los 6 años de primaria, investigando el material de instrucción y los procesos de desarrollo de los estudiantes. Para ello, necesitamos entender cómo el contenido aprendido previamente es necesario para aprender el nuevo contenido, y cuán útil es.

Lo que aprendieron los estudiantes sobre la multiplicación en el 2º grado es precisamente útil para el cálculo. La idea que aprendieron acerca de “cuántas veces una cantidad es la unidad de medida”, es una idea fundamental en matemáticas.

Profesores que ayudan a animar el aprendizaje de los estudiantes entre sí.

Además de esto, en 2º grado los estudiantes aprenden “longitud” por comparación directa, comparación indirecta, y la medida con unidades arbitrarias. Así, los estudiantes que reconocen la necesidad de medir con una unidad universal pueden aprender el “peso” en 3º grado usando un pensamiento similar.

Los estudiantes que piensan en el “por qué” del proceso de resolución de problema, pueden comenzar a hacer conexiones entre el problema y lo que necesitan pensar sobre él, así como lo que requieren pensar.

Punto de Vista 2

“Los estudiantes pueden aprender entre sí y esto les ayuda a pensar conscientemente acerca de sus propios procesos de resolución.”

Existen muchas cosas nuevas que los estudiantes pueden aprender entre sí en la sala de clases, cuando ellos sienten realmente el valor de las matemáticas, su belleza e importancia.

- Los estudiantes pueden clarificar sus propios procesos de resolución y participar en la discusión para aprender entre sí.
- Los estudiantes pueden aprender a través del descubrimiento comparando su propio pensamiento y el de otros.
- Los estudiantes pueden reflexionar y evaluar lo que ellos entienden y lo que no.
- Los estudiantes pueden precisar acerca de cómo ellos resuelven los problemas.

Las experiencias de aprendizaje en la sala de clases que fomentan aprender entre sí, según lo explicado, no solamente mejora el aprendizaje del estudiante sino que también desarrolla un fuerte vínculo entre los mismos estudiantes.

Punto de Vista 3

“Evaluación que fomente la capacidad de pensamiento lógico de los estudiantes.”

En orden a que los estudiantes sean capaces de “pensar lógicamente”, creemos que necesitan precisar acerca de sus propios procesos de resolución cuando están ocupados en actividades de resolución de problemas.

En primer lugar, para que los estudiantes enriquezcan su aprendizaje aprendiendo con otros, pensamos que es muy importante que el profesor proporcione ayuda organizando la pizarra y destacando los puntos importantes de la clase para enriquecer el pensamiento del estudiante.

En segundo lugar, deseamos planificar ayudas apropiadas de modo que los estudiantes sientan la necesidad de que ellos requieren pensar en qué conocimiento anterior necesitan recordar y puedan hacer conexiones a la nueva situación problema. Además, deseamos incluir preguntas de soporte para ani-

mar a los estudiantes a pensar a fondo en sus procesos de resolución, entender cada idea que entregan, incluyendo las semejanzas y las diferencias de dichas ideas, ampliando el conocimiento que pueden ganar a partir de unos con otros.

Finalmente, preparamos un segundo problema que nos ayuda a entender el aprendizaje de los estudiantes durante la clase para apoyar la comprensión del efecto del aprendizaje de los estudiantes que aprenden entre sí en clases.

Apoyo al profesor para mejorar el aprendizaje de los estudiantes Administraremos test para comprender el estado real de aprendizaje de los estudiantes. Hacer pruebas no es sólo un camino para comprender el estado real de aprendizaje, sino que pueden ser útiles si los profesores las usan para reflexionar y mejorar su propia enseñanza.

Lograr una mejor comunicación con otros sujetos del grupo.

Es importante fomentar las capacidades de expresarse matemáticamente de los estudiantes que aprenden entre sí en la sala de clase. Algunos ejemplos de las capacidades que deseamos fomentar son:

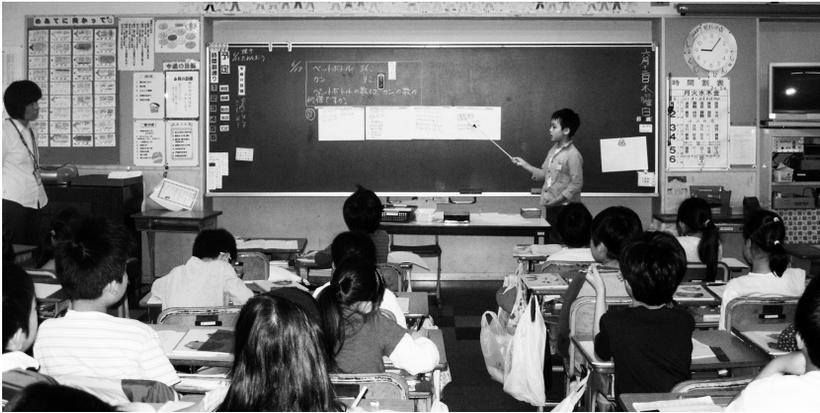
Fomentar en los estudiantes la capacidad de expresarse matemáticamente:

- Ser capaz de describir ideas usando rectas numeradas y diagramas.
- Ser capaz de manipular los materiales concretos y explicar sus ideas a otros.
- Ser capaz de pensar y entender los significados de números y de las operaciones expresándolos en frases matemáticas.
- Ser capaz de tomar apuntes que reflejen el pensamiento de los estudiantes y sus puntos de vista.

Para fomentar "capacidades sólidas" y "corazones y mentes fuertes". Los estudiantes que adquieren esta forma de capacidad pueden participar en la sala de clase aprendiendo de las siguientes maneras:

A fines de 2° grado, los estudiantes comienzan a usar expresiones como por ejemplo, "porque..." para describir sus razones y para apoyar sus ideas.

En el 3° grado, comienzan a comparar sus propias ideas con otros y las expresiones que usan son "mi idea es similar a esa idea, así que..."



En 4° grado, los estudiantes utilizan la expresión como “por ejemplo...” y “porque...,” con más frecuencia. Por otra parte, comienzan a utilizar declaraciones hipotéticas como “si esto es así... entonces...”

En 5° grado, pueden ser más sofisticadas las declaraciones como por ejemplo “si esto es... entonces será \square , pero si es \blacklozenge entonces pienso que podemos decir \blacksquare ”, bajo ciertas condiciones.

Finalmente, en 6° grado, los estudiantes pueden comenzar a describir por ejemplo, “puede decirse que esto es así... pero en esta situación \square es mucho mejor,” y empiezan a tomar decisiones sobre cómo elegir una idea mejor.

Esperamos ver esta capacidad de expresarse matemáticamente más a menudo en la sala de clase, por lo tanto, quisiéramos examinar el estado real del aprendizaje de los estudiantes más cuidadosamente.

¿Qué es importante para el Grupo de Matemáticas?

Es importante para que el Grupo de Matemáticas establecer una buena comunicación con otros grupos en la Escuela. Nuestra valoración y visión de la enseñanza y aprendizaje de la sala de clase antes descrito, debe ser entendido por todos los miembros del personal de modo que podamos proporcionar un acercamiento consistente y sistemático para educar a nuestros estudiantes en la escuela en su totalidad.

Creemos que los “sentimientos y emociones” necesitan ser incorporados en el aprendizaje del estudiante. Los “sentimientos y emociones” de los que hablamos aquí, son las “esperanzas” y “deseos”, y los que se derivan de

las propias "particularidades": todas necesarias para que los estudiantes se involucren autónoma y activamente en su propio aprendizaje. Esto incluye los sentimientos y emociones expresadas mediante palabras tales como "me pregunto porqué será?", "si es así ... entonces...", "siempre es verdad?...", y, "eso ... ¡lo encontré!..."

Éstas son algunas de las cosas que esperamos y que estamos tratando de lograr. Creemos que "el conocimiento gana a través de los sentimientos y las emociones", éstos ayudarán de verdad a los estudiantes a adquirir "capacidades sólidas" y "corazones y mentes fortalecidos".

- Características de los alumnos de la Escuela de Maruyama

Realizamos una encuesta sobre el aprendizaje de matemáticas con los estudiantes de 3° grado de la Escuela Elemental de Maruyama.

¿Te gustan las matemáticas?

Sí	50%
Algunas veces sí	44%
Algunas veces no	5%
No	1%

Los estudiantes que contestan "Sí":

- Me gustan los cálculos y disfruto de ellos.
- Sí, yo entiendo, es entretenido.
- Porque las respuestas son claras.
- Porque puedo escuchar las diversas ideas.

Los estudiantes que contestan "Algunas veces sí":

- Me gustan los cálculos, pero no los problemas.
- Es muy difícil construir frases matemáticas para los problemas.

Los estudiantes que contestan "Algunas veces no" y "No":

- No me gustan los problemas.
- Las pruebas son difíciles.
- Es muy difícil construir frases matemáticas.

A los estudiantes de 3° grado en Maruyama les gustan los cálculos pero muchos sienten que no son buenos en construir frases matemáticas para los problemas. Por lo tanto, las siguientes ideas fueron usadas para desarrollar unidades y clases.

- Deseamos incrementar el número de estudiantes que piensen lógicamente, y dotarlos con las capacidades que necesitan para entender las estructuras del problema usando diagramas y rectas numeradas.
- Deseamos incrementar el número de estudiantes que estén interesados en escuchar los procesos de resolución de otros estudiantes, pensar acerca de “si el proceso de resolución es similar o diferente” y ser capaz de comunicarlo.

Los tópicos que los estudiantes aprenden en 3° grado son los siguientes:

- Adición y sustracción (número de 3 cifras).
- Multiplicación (2 y 3 cifras por 1 cifra usando el algoritmo).
- División (significado y resto).
- Números grandes (hasta 10 millones).
- Tiempo y tiempo transcurrido (significado).
- Capacidad, longitud, peso.
- Características de rectángulos y cuadrados.
- Formas de cajas (características y redes).
- Tablas y gráficos de barras (datos categorizados y construcción de tablas y gráficos de barras).

Una de las ideas matemáticas más importantes que los estudiantes aprenden en casi todos los dominios en 3° grado de matemáticas, es pensar sobre cantidades en términos de “cuántas veces está contenida la unidad de medida en la cantidad”:

- En la adición, sustracción y números grandes, vemos al 1, 10, 100, etc., como unidad.
- En la multiplicación y división, vemos “cuántas veces contiene la unidad de medida” y “dividir algo en un número de unidades”.
- En tiempo y tiempo transcurrido, capacidad, la longitud y peso, vemos como “cuántas veces contiene la unidad de medida”.

Usando la gran idea matemática de “cuántas veces una cantidad contiene una cantidad unitaria” como principio rector, desarrollamos clases que ayuden a enfatizar esta idea tanto como pensar acerca de clases diarias que ayudarán a nutrir esta idea, por ejemplo:

- Desarrollando clases que ayuden a los estudiantes a ser conscientes de la conexión entre lo que aprendieron antes y lo que están aprendiendo ahora y usar este conocimiento aprendido previamente para superar obstáculos en una nueva situación.
- Representando una situación problema con diagramas basados sobre la idea de “cuántas veces una cantidad contiene una cantidad unitaria” consistentemente y ayudando a los estudiantes a entender la situación y la resolución del problema con mayor claridad, y desarrollando clases que incorporen esta idea y que les ayude a usar el diagrama para pensar lógicamente acerca de la solución de un problema.
- Desarrollando clases que ayuden a los estudiantes a comprender con qué necesitan comparar. Esta comprensión se enriquecerá con clases que pongan atención al proceso del método de solución que utilice conocimientos ya aprendidos.

Planificación de la Unidad “Multiplicación con multidígitos”

- Características de la Unidad

Esta sección corresponde a un plan de enseñanza de la multiplicación para alumnos que ya han estudiado las tablas, digamos para 3° básico en Japón u otros países desarrollados. Las expectativas de logro de la unidad son aplicar la operación de multiplicación cuyo producto es menor que 10000, y resolver problemas de la vida cotidiana.

Esta Unidad se refiere al cálculo mental y escrito de multiplicaciones con números naturales en el rango numérico menor a 10000. La Unidad está estructurada de manera que los alumnos vayan resolviendo problemas cada vez con mayores complejidades, de manera que vayan aproximándose al desarrollo de una estrategia óptima para multiplicar números de dos o más dígitos entre sí. Como conocimientos ya adquiridos se asume el dominio de las tablas de multiplicar y de sus propiedades, temas propios de 2do básico. El plan de unidad es el siguiente:

<p>Conocimientos previos (2° grado):</p> <p>Multiplicación cuyos factores sean menores que 10:</p> <ul style="list-style-type: none"> · Tabla de multiplicación de 2 y 5. · Tabla de multiplicación de 3, 4, 6, 7, 8, 9. · Multiplicación por 1. · Propiedad conmutativa de la multiplicación. <p>Temas de la Unidad:</p> <p>Multiplicación cuyo producto sea menor que</p>	<p>10000:</p> <ul style="list-style-type: none"> · Multiplicación por 0. · $D0 \times U$ (sin canje). · $C00 \times U$ (sin canje). · $DU \times U$ (sin canje). · $DU \times U$ (con canje en la centena, la decena y ambas). · $CDU \times U$ (canjeando a la unidad de mil, a la centena, a la decena, a la centena y a la unidad de mil, a la decena y a la unidad de mil, a la decena y a la centena, a la decena y a la centena, a la decena y a la centena y a la unidad de mil). 	<p>Multiplicación cuyo producto sea menor que $100000 \text{ MCDU} \times U$ (sin canje y con canje, todos los casos):</p> <ul style="list-style-type: none"> · $DM \text{ MCDU} \times U$ (sin canje y con canje, todos los casos). · $DU \times DU$ (sin canje y con canje, todos los casos) · $CDU \times DU$ (sin canje y con canje, todos los casos). · $CDU \times CDU$ (sin canje y con canje, todos los casos).
---	---	--

Nota: En $D0 \times U$, por ejemplo, 0 representa la ausencia de valor en las unidades.

Plan de estudio (18 horas):

<p>1. Multipliquemos con ceros (4 horas)</p>	<p>1/4 2/4 3/4 4/4</p>	<p>Multiplicación por 0. Multiplicación 10, 100, 1000 x U. Término: factor. Multiplicación $D0$, $C00$, $UM000 \times U$ (sin canje). Multiplicación $D0$, $C00 \times U$ (con canje).</p>
<p>2. Multipliquemos en la forma vertical (5 horas)</p>	<p>1/5 2/5 3/5 4/5 5/5</p>	<p>Multiplicación $DU \times U$ (sin canje). Multiplicación $DU \times U$ (con canje en el proceso de $U \times U$). Multiplicación $DU \times U$ (con canje en el proceso de $D \times U$). Multiplicación $DU \times U$ (con canje en el proceso de $U \times U$ y $D \times U$, con canje en el proceso de sumar los productos parciales). Significación y dominio. Resolución de ejercicios y problemas.</p>
<p>3. Sigamos multiplicando en la forma vertical (5 horas)</p>	<p>1/5 2/5 3/5 4/5 5/5</p>	<p>Multiplicación $CDU \times U$ (sin canje). Multiplicación $CDU \times U$ (con canje en el proceso de $U \times U$ y/o $D \times U$). Multiplicación $CDU \times U$ (con canje en el proceso de $C \times U$, con canje en el proceso de sumar los productos parciales). Resolución de ejercicios y problemas. Aplicación y dominio.</p>
<p>4. Multiplicando y multiplicador con dos o más dígitos</p>	<p>1/4 2/4 3/4 4/4</p>	<p>Multiplicación de números $DU \times DU$ sin canje Multiplicación de números $DU \times DU$ con canje Explicaciones a la forma de multiplicar multidígitos Multiplicando números de $CDU \times DU$</p>

- Identificación de las subunidades de la Unidad

Cuando el multiplicando es un número de 2 ó más cifras, generalmente hay que realizar 2 o más multiplicaciones e ir sumando cada resultado de cada multiplicación para obtener el producto. Estos resultados de la multiplicación realizados dentro del proceso de cálculo se llaman productos parciales. Por ejemplo, en la operación 23×4 los productos parciales son 12 y 80, que son los resultados de 3×4 y 20×4 respectivamente, y en la operación 20×15 los productos parciales son 100 y 200, que son los resultados de 20×5 y 20×10 .

Para multiplicar los números de más de 2 cifras, se descompone el multiplicando basándose en el valor posicional, por ejemplo, la operación de 231×2 se comienza descomponiendo 231 en 200, 30 y 1, y luego se realiza la multiplicación de 200×2 , 30×2 y 1×2 (en la forma vertical el orden del cálculo es de las unidades hacia las posiciones mayores).

Subunidad 1: Multipliquemos con ceros

En esta subunidad, para tener la base de este tipo de operación, se tratan la multiplicación por 0 y las multiplicaciones de los tipos $D0 \times U$, $C00 \times U$ y $UM000 \times U$, sin canje y con canje. Además se trata $UM000 \times U$ (pero sólo "sin canje" por no haber estudiado aún los números mayores que 9999) ampliando el mecanismo de $D0 \times U$ y $C00 \times U$ para que en el siguiente nivel, puedan introducir la operación de $UMCDU \times U$ sin dificultad.

Seamos cuidadosos al enseñar la tabla del 0. Los niños tienen dificultad para la comprensión de la multiplicación cuando uno de los factores es 0, generalmente por no poder sentir la necesidad de plantear la operación. Aun cuando observen el Procedimiento Operatorio con los números, hay posibilidad de tener dificultades al contestar, como por ejemplo erróneamente " $3 \times 0 = 3$ ", a pesar de que ellos conocen sobre situaciones en la vida cotidiana donde el producto es 0. Por lo tanto, se evita introducir este contenido solamente con los números y se introduce con situaciones de la vida cotidiana de modo que comprendan necesariamente el planteamiento de la operación de " $_ \times 0$ " y " $0 \times _$ ", y el sentido de la multiplicación con 0 tal y como lo han aprendido con las tablas de los otros números. De modo que, la subunidad contiene 1 sesión extensa que se refiere a construir y memorizar, ejercitar y aplicar la tabla del 0. Luego se estudia la multiplicación por 10, decenas, 100, centenas y más.

Subunidad 2: Multipliquemos en la forma vertical

En esta subunidad se trata la multiplicación de $DU \times U$ en la forma vertical, sin canje y con canje. La ventaja del cálculo vertical es reducir los cálculos a los del tipo $U \times U$ y facilitar la suma de los productos parciales. Esta forma utiliza el valor posicional, es decir, la variación del valor de un dígito de acuerdo a la posición que ocupa: centena, decena o unidad, y la transformación de un número por cambio de posición de sus dígitos.

Al planificar el estudio, hay que orientar la enseñanza para que los mismos niños encuentren, mediante el razonamiento lógico, la manera de realizar el cálculo de $DU \times U$ basándose en lo aprendido (la multiplicación $U \times U$, composición y descomposición de los números y la multiplicación de $D0 \times U$). Y que identifiquen que aunque la cantidad de las cifras sea mayor en el multiplicando, se puede encontrar la respuesta sumando todos los productos parciales, utilizando la tabla de la multiplicación. La subunidad se desarrolla según el nivel de dificultad del cálculo de modo que vaya de lo simple a lo complejo. Hay que tomar en cuenta esta dificultad al dar los ejercicios.

Es necesario poner atención en el valor posicional del producto para evitar que el alumno se equivoque. Para eso es importante aclarar la dimensión de cada producto parcial usando materiales como el dibujo y la tarjeta numérica, entre otros, para que entiendan el sentido y el mecanismo del cálculo.

Subunidad 3: Sigamos multiplicando en la forma vertical

Siguiendo la subunidad 2, el punto de esta subunidad es que los niños entiendan el mecanismo del cálculo de $CDU \times U$ (sin canje y con canje en U , en D y en C) como en el caso $DU \times U$. Si comprenden bien el principio y el mecanismo de $DU \times U$ con suficientes ejercicios, pueden pensar por sí mismos en la forma de calcular $CDU \times U$, razonando y aplicando lo aprendido. Solamente hay que tomar en cuenta en el tipo $COU \times U$ dándoles la explicación de que el "0" es un número (que representa la ausencia del valor en la posición) igual que los otros ya que el proceso del cálculo es lo mismo sin depender del dígito

Subunidad 4: Multiplicando y multiplicador con dos o más dígitos

Esta subunidad amplía los números para más dígitos en el numerados. Y al igual que las otras subunidades establece una enseñanza del algoritmo a partir de situaciones cada vez más complejas.

- Sugerencias generales para el tratamiento de la Unidad:

Acerca de los procedimientos de operación tratados en la Unidad. Se consideran los siguientes criterios para clasificar los procedimientos de operación:

- Clasificación según su representación. Ejemplos: DU x U y CDU x U.
- Clasificación según la exigencia de canje. Los procedimientos se ordenan según el producto parcial sea de una cifra (sin canje), o de dos cifras (con canje). Aunque en Chile usualmente se emplea la expresión "con reserva" y "sin reserva", este texto utiliza los términos actuales en el contexto internacional de "canje" y "reagrupamiento".

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 4 \\ \hline 8 \\ 120 \\ \hline 128 \end{array}$$

8 $4 \times 2 = 8$ una cifra (sin canje).
120 $4 \times 3 = 12$ dos cifras (con canje).
128

- Clasificación según la ubicación del canje. Al sumar un producto parcial con el número que se canjeó del producto parcial anterior, se canjea o bien no se canjea.

Ejemplo:

$\begin{array}{r} 69 \\ \times 6 \\ \hline 41 \\ 414 \end{array}$ <p>$6 \times 9 = 54$, canjea 5 y $6 \times 6 = 36$</p> <p>36 y 5 que se canjeó son 41 (se canjea)</p>	$\begin{array}{r} 69 \\ \times 4 \\ \hline 27 \\ 276 \end{array}$ <p>$4 \times 9 = 36$, canjea 3 y $4 \times 6 = 24$.</p> <p>24 y 3 que se canjeó son 27 (aquí no se canjea)</p>
---	--

- Clasificación según contengan 0 ó no en los factores y en el producto.
- Clasificación según el número de veces que se canjee (en la U, en la D ó en la C).

La combinación de estos criterios de clasificación lleva a muchas variedades. En esta planificación, las clases se ordenan según una combinación de estos criterios, y como lo muestra el plan de estudio, se toman en cuenta las etapas en forma gradual de modo que se pueda aplicar lo aprendido.

Acerca del uso de juegos para aprender en esta Unidad:

Juego: "Relevo del cálculo vertical".

Este juego se usa en la sesión 4 de la subunidad 3 (multiplicación CDU x U). Sirve para fijar el proceso del cálculo vertical y fortalece la colaboración en equipo. Se puede utilizar no sólo en la multiplicación sino también en la práctica de otras operaciones fundamentales.

- Formar grupos con cuatro niños (la cantidad puede cambiar según el número de estudiantes de la clase y de cifras en el cálculo).
- El profesor dictará un ejercicio de la multiplicación de CDU x U.
- Al escuchar la señal, el primer niño o niña de cada grupo irá a la pizarra y escribirá el ejercicio que dictó el profesor. Los demás lo escribirán en su cuaderno.
- Sustituyendo el testigo por la tiza (como en la carrera de relevos), el segundo niño irá a la pizarra y hará el cálculo de las unidades, el tercer niño hará el cálculo de las decenas y el cuarto niño hará el cálculo de las centenas, hasta que encuentren la respuesta (los niños y las niñas rotarán de turno para que todos operen en distintas posiciones).
- Juntos calificarán la rapidez con que terminaron de realizar los cálculos, principalmente el profesor. El grupo que termine primero ganará 1 punto, el segundo 2 puntos y el tercero 3 puntos, y así sucesivamente. Luego, el grupo que obtenga menos puntos gana. (Si encontraron la respuesta equivocada el grupo obtendrá 10 puntos).
- Los niños que no pasan a la pizarra, resolverán en sus cuadernos.
- Los niños se comprometerán a no hablar durante el juego, pero pueden animarse con gestos y mímicas. (Pueden inventar otra regla, por ejemplo, si hablan se agrega un punto al grupo).
- Es favorable dar a los niños un poco de tiempo para que practiquen con sus compañeros y compañeras de grupo antes de empezar el juego.

Planificación de la Unidad "Multipliquemos con ceros"

A continuación se presenta la planificación de la Unidad por sesión:

UNIDAD MULTIPLICACIÓN CON 2 A 4 CIFRAS:

SUBUNIDAD MULTIPLIQUEMOS CON CEROS

(4 SESIONES)

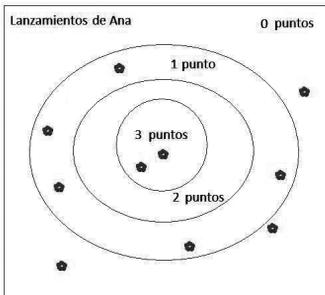
Sesión 1: Multiplicando con el factor 0.

Página 1 de 3

Objetivo de la Sesión: Que multiplique usando el cero como uno o ambos factores.

Pregunta Central: ¿Qué significa multiplicar por cero? Esperamos que el alumno pueda calcular el producto cuando uno o ambos factores es cero.

Prof.: Cada jugador lanza sus fichas. La ficha que cae en el centro vale 3 puntos, vale 2 al caer en el anillo vecino, 1 en el siguiente y 0 en el último.



Situación problema: ¿Cómo interpretar el producto de una multiplicación cuando la cantidad en cada grupo es 0 y cuando se repite cero o ninguna vez cierto grupo?

Prof.: Dos lanzamientos de Ana caen en el centro. ¿Cuántos puntos obtuvo por esos lanzamientos?

Alumno: Como las 2 fichas valen 3 puntos, obtiene 3+3 puntos, o bien 3×2 , es decir 6 puntos.

Prof.: (escribe en la pizarra) "valor de la región" "x" "número de veces" "=" "puntos según la región".

Prof.: ¿Cuántos puntos gana Ana en cada región, según la tabla?

Tabla con la puntuación de Ana:

Puntos	3	2	1	0
Cantidad de veces	2	0	5	3

Prof.: Cinco lanzamientos de Ana cayeron en el círculo que vale 1 punto. ¿Cuántos puntos obtuvo Ana por esos cinco lanzamientos?

Alumno: Cada acierto vale 1 punto y acertó 5 veces. La multiplicación es $1 \times 5 = 5$, luego obtuvo 5 puntos en la región.

Prof.: Encuentre los puntos ganados por los aciertos en el segundo anillo. Ninguna ficha cayó en esa región. A partir de ello, diga cuánto es 2×0 .

Alumno: " 2×0 " significa que no cayó ninguna ficha en el valor 2 (refiriéndose a la región que da dos puntos por acierto), entonces gana cero puntos. Así que $2 \times 0 = 0$.

El profesor explica el juego a los alumnos, mostrando la lámina en la pizarra, para que entiendan el sentido del problema:

Presenta el problema, a partir de una lámina.

El profesor se acerca a la pregunta partiendo por la situación más familiar para los alumnos, el caso en que se ganan 3 puntos por lanzamiento.

El profesor insiste en el modelo multiplicativo del planteamiento de la operación. Luego continúa con el caso de la multiplicación por "1", estudiado en la clase anterior, consolidando el proceso operatorio.

Determinar el procedimiento operatorio para el caso en que el multiplicador es 0:

El profesor intenta que los alumnos se den cuenta que pueden usar la multiplicación cuando se repite 0 veces una cantidad.

Los alumnos explican con sus palabras el sentido del procedimiento para operar.

UNIDAD MULTIPLICACIÓN CON 2 A 4 CIFRAS:**SUBUNIDAD MULTIPLIQUEMOS CON CEROS****(4 SESIONES)****Sesión 1:** Multiplicando con el factor 0.

Página 2 de 3

Objetivo de la Sesión: Que el alumno multiplique usando el cero como uno o ambos factores.**Pregunta Central:** ¿Qué significa multiplicar por cero?

Esperamos que calcule el producto cuando uno o ambos factores son cero.

Prof.: ¿Cuánto es el producto de 0×3 ?Alumno 1: Ana gana 0 puntos por caer 3 veces en la región que le da 0 puntos. Pues cada vez que cae allí gana 0 puntos. Es decir, $0+0+0$ es 0. Luego, $0 \times 3=0$.

$2 \times 3 = 6$	$3 \times 3 = 9$
$2 \times 2 = 4$	$2 \times 3 = 6$
$2 \times 1 = 2$	$1 \times 3 = 3$
$2 \times 0 = \square$	$0 \times 3 = \square$

Alumno 2: Si 2 puntos por caer 3 veces tendría 6 puntos, si ganara 1 punto por caer 3 veces tendría 3 puntos, si ganara 0 puntos al caer 3 veces ...

Prof.: ¿Qué significa 0×0 en este juego?

Prof.: ¿Qué concluimos de la multiplicación con 0 como multiplicador o multiplicando?

Alumno: Cualquier número multiplicado con 0 es igual a 0, ó 0 multiplicado por cualquier número es 0.

Prof.: Resuelvan los siguientes ejercicios.

Ejercicios:

(1) $5 \times 0 =$	(2) $7 \times 0 =$	(3) $0 \times 3 =$
(4) $9 \times 0 =$	(5) $0 \times 1 =$	(6) $0 \times 0 =$
(7) $0 \times 8 =$	(8) $4 \times 0 =$	(9) $0 \times 6 =$

Prof.: Resuelvan los siguientes problemas:

Problemas:

- (1) En cada cajita de chicle ya no hay chicle. Si hay 3 cajitas, ¿cuántos chicles hay?
- (2) Se vende 5 bombones en cada bolsa. No compré bolsas. ¿Cuántos bombones compré?

Determinar el procedimiento operatorio para el caso en que el multiplicando es 0.

El profesor intenta que los alumnos se den cuenta que pueden usar la multiplicación cuando el número ó valor a repetir es 0.

El profesor puede incorporar la noción de decrecimiento en 1 del multiplicador o decrecimiento en 1 del multiplicando.

Determinar el procedimiento operatorio para el caso en que ambos sean 0, tanto el multiplicador como el multiplicando:

Los alumnos dan sus opiniones y el profesor confirma el procedimiento operatorio (0×0) y el producto (0) en función de las opiniones de los alumnos: ninguna ficha cae en la región que da 0 puntos.

Concluir las características de la multiplicación por 0:

El profesor, utiliza la expresión "multiplicar con 0", para que los niños entiendan que la regla se aplica cuando "0" es cualquiera, el multiplicando o bien el multiplicador.

Practicar para memorizar y aplicar la multiplicación con cero:

UNIDAD MULTIPLICACIÓN CON 2 A 4 CIFRAS: SUBUNIDAD MULTIPLIQUEMOS CON CEROS (4 SESIONES) Sesión 1: Ejercitando y aplicando la multiplicación por 0. Página 3 de 3 Objetivo de la Sesión: Que el alumno resuelva ejercicios y problemas en que aplique la multiplicación por 0. Pregunta Central: ¿Recuerdas las tablas del 0, y es capaz de usarla para resolver problemas? Esperamos que el alumno resuelva ejercicios y problemas en los que aplique la multiplicación por 0.	
<p>Primera actividad: Resolver ejercicios.</p> <p>Prof.: Resuelvan los siguientes 20 ejercicios.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Ejercicios. Resuelva los siguientes ejercicios:</p> <p>(1) $5 \times 0 =$ (2) $7 \times 0 =$ (3) $0 \times 0 =$ (4) $1 \times 0 =$ (5) $0 \times 4 =$ (6) $0 \times 9 =$ (7) $9 \times 0 =$ (8) $0 \times 1 =$ (9) $0 \times 7 =$ (10) $0 \times 3 =$ (11) $6 \times 0 =$ (12) $2 \times 0 =$ (13) $6 \times 0 =$ (14) $0 \times 8 =$ (15) $0 \times 4 =$</p> </div> <p>Prof. (tras unos minutos): Salgan 5 alumnos de esta fila y escriban una respuesta, -en seguida- ¿Dudas?</p> <p>Alumno: No tengo en la tabla el resultado de 1×0.</p> <p>Prof.: ¿Cómo lo calcularías?... ¿Quién puede sugerir?</p> <p>Alumno: 1×0 es 0.</p> <p>Prof.: ¿Puedes comprobarlo?</p> <p>Alumno: En cada caja de fósforos hay 1 fósforo. Si tengo cero cajas de fósforos, tengo 0 fósforos.</p> <p>Prof.: Trabajen individualmente (recorre la sala).</p> <p>Segunda actividad: Resolver problemas.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Problemas. Resuelva los siguientes problemas:</p> <p>(1) Cada día tomo un vaso de leche y ninguna taza de café. ¿Cuántos vasos y tazas tomo en 6 días?</p> <p>(2) Se vende 4 caramelos en cada cajita. Si no tengo cajita, ¿cuántos caramelos tengo?</p> <p>(3) Van 9 autos. En cada auto hay dos adultos y ningún niño. ¿Cuántos adultos y niños hay en total?</p> <p>(4) Hay 3 jaulas de pajaritos. En cada jaula no hay pajaritos. ¿Cuántos pajaritos hay en total?</p> </div> <p>Prof.: ¿Quién explica cómo resolvió el primer problema y qué relación hay con el procedimiento operatorio?</p> <p>Alumno explica en la pizarra y luego sale otro alumno.</p>	<p>El profesor da tiempo para que los alumnos trabajen individualmente. Una vez que gran parte del curso termina, elige a 5 alumnos para que escriban las respuestas, todos a la vez. Luego, pide a todos los niños que opinen, sin borrar los errores, sino marcándolos con X y corrigiéndolos.</p> <p>De manera análoga continúa con el resto de los ejercicios.</p> <p>El profesor atiende a los alumnos en sus puestos, dando preferencia a los alumnos que tienen mayor dificultad.</p> <p>El profesor garantiza el tiempo para que todos los alumnos terminen los ejercicios.</p> <p>El profesor insiste en el sentido del procedimiento operatorio a partir del análisis de las respuestas de los alumnos en la pizarra, les solicita que comenten entre ellos. Luego les pide que salgan a explicar a la pizarra.</p>

<p>UNIDAD MULTIPLICACIÓN CON 2 A 4 CIFRAS: SUBUNIDAD 1. MULTIPLICACIÓN CON CEROS (4 SESIONES)</p> <p>Sesión 2: Descubriendo la multiplicación por 10, 100 y 1000. Página 1 de 1</p> <p>Objetivo de la sesión: Descubrir una regla para multiplicar 10, 100, 1000 x U.</p> <p>Pregunta Central: ¿Qué regla sirve para calcular multiplicaciones con 10, 100 y 1000? Se espera que el alumno descubra que para multiplicar por 10, 100 ó 1000, basta agregar uno o más ceros al multiplicador para obtener el producto.</p>																	
<p>Prof.: Recordemos.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>Pizarra: Hay 4 cajas, cada una tiene 5 pelotas. ¿Cuántas pelotas hay en total? Calcular (1) $4 \times 3 =$ (2) $6 \times 7 =$ (3) $7 \times 8 =$ (4) $9 \times 8 =$ (5) $1 \times 6 =$ (6) $0 \times 5 =$ Completar: (1) $8 \times 3 = \dots \times 8$ (2) $6 \times \dots$ es 6 más que 6×4.</p> </div> <p>Situación problema: Diez pesos cuesta cada dulce. Compró 4 dulces, ¿Cuánto cuesta el total de dulces? Posibles estrategias: Contando de 10 en 10. Sumando $10 + 10 + 10 + 10$. Razonando 10 es una decena y hay 4. Prof.: ¿Se puede resolver con la multiplicación? Alumnos (plantean) $10 \times 4 = 40$ (y responden) 40 dulces. Prof. (confirma comprensión): ¿Por qué plantean 10×4? Prof.: ¿Cómo encuentra la respuesta? Encuentren la regla del cálculo. ¿Cuál es el valor si compro 5 dulces? Alumnos concluyen la regla: escribir U y agregarle un 0.</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin: 5px 0;"> <tr> <td style="width: 25%; padding: 2px;"> $10 \times 5 = 50$ $10 \times 7 = 70$ $10 \times 2 = 20$ $10 \times 8 = 80$ </td> <td style="padding: 2px;"> Pizarra: En la multiplicación de 10, se encuentra el producto pensando cuántas decenas hay. Se escribe la cantidad de decenas y se agrega 0. </td> </tr> </table> <p>Prof.: Escriban la tabla del 10. 10 es el multiplicando y 4 es el multiplicador. Ambos se llaman factores.</p> <p>Prof.: Piensen cuánto es el producto al multiplicar con 100 ó 1000. ¿Cuál es la regla para calcular?</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin: 5px 0;"> <tr> <td style="width: 50%; padding: 2px;"> Pizarra: 100×4 $100 \ 100 \ 100 \ 100$ $100 \times 4 = 400$ </td> <td style="width: 50%; padding: 2px;"> 1000×4 $1000 \ 1000 \ 1000 \ 1000$ $1000 \times 4 = 4000$ </td> </tr> </table> <p>Alumnos constatan que al multiplicar con 100 ó 1000, encuentran el producto pensando en centenas o miles.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>Ejercicios en la pizarra:</p> <table style="width: 100%;"> <tr> <td>(1) $10 \times 3 =$</td> <td>(2) $10 \times 9 =$</td> <td>(3) $10 \times 6 =$</td> </tr> <tr> <td>(4) $10 \times 1 =$</td> <td>(5) $100 \times 5 =$</td> <td>(6) $100 \times 0 =$</td> </tr> <tr> <td>(7) $100 \times 2 =$</td> <td>(8) $100 \times 9 =$</td> <td>(9) $1000 \times 6 =$</td> </tr> <tr> <td>(10) $1000 \times 3 =$</td> <td>(11) $1000 \times 9 =$</td> <td>(12) $1000 \times 1 =$</td> </tr> </table> </div>	$10 \times 5 = 50$ $10 \times 7 = 70$ $10 \times 2 = 20$ $10 \times 8 = 80$	Pizarra: En la multiplicación de 10, se encuentra el producto pensando cuántas decenas hay. Se escribe la cantidad de decenas y se agrega 0.	Pizarra: 100×4 $100 \ 100 \ 100 \ 100$ $100 \times 4 = 400$	1000×4 $1000 \ 1000 \ 1000 \ 1000$ $1000 \times 4 = 4000$	(1) $10 \times 3 =$	(2) $10 \times 9 =$	(3) $10 \times 6 =$	(4) $10 \times 1 =$	(5) $100 \times 5 =$	(6) $100 \times 0 =$	(7) $100 \times 2 =$	(8) $100 \times 9 =$	(9) $1000 \times 6 =$	(10) $1000 \times 3 =$	(11) $1000 \times 9 =$	(12) $1000 \times 1 =$	<p>Puntos a considerar Repaso Revisar conocimientos adquiridos.</p> <p>Leer el problema y entender la situación: Dar tiempo para que piensen y resuelvan individualmente. Identificar la operación y/o notar que es de tipo multiplicativa.</p> <p>Escribir el planteamiento de la operación: Traducen 4 “veces” como una multiplicación por 4 y escriben la expresión multiplicativa.</p> <p>Encontrar la respuesta: Que expresen cómo resolvieron. Concluir forma de calcular $10 \times U$. Que descubran el producto pensando en decenas. Para concluir escriben tabla del 10. Explicar el término “factor”.</p> <p>Pensar forma de calcular: $100 \times U$ y $1000 \times U$. Que encuentren el producto. Concluir forma de calcular.</p> <p>Resolver: Ejercicios.</p>
$10 \times 5 = 50$ $10 \times 7 = 70$ $10 \times 2 = 20$ $10 \times 8 = 80$	Pizarra: En la multiplicación de 10, se encuentra el producto pensando cuántas decenas hay. Se escribe la cantidad de decenas y se agrega 0.																
Pizarra: 100×4 $100 \ 100 \ 100 \ 100$ $100 \times 4 = 400$	1000×4 $1000 \ 1000 \ 1000 \ 1000$ $1000 \times 4 = 4000$																
(1) $10 \times 3 =$	(2) $10 \times 9 =$	(3) $10 \times 6 =$															
(4) $10 \times 1 =$	(5) $100 \times 5 =$	(6) $100 \times 0 =$															
(7) $100 \times 2 =$	(8) $100 \times 9 =$	(9) $1000 \times 6 =$															
(10) $1000 \times 3 =$	(11) $1000 \times 9 =$	(12) $1000 \times 1 =$															

<p>UNIDAD MULTIPLICACIÓN CON 2 A 4 CIFRAS: SUBUNIDAD 1 MULTIPLICACIÓN CON CEROS (4 SESIONES) Sesión 3: Descubriendo la multiplicación por D0, C00, U_m000 x U. Página 1 de 1 Objetivo de la Sesión: Multiplicar D0, C00, U_m000 x U sin canje. Pregunta Central: ¿Cómo calcular en multiplicaciones entre D0, C00 y UM000, y un número de una cifra, sin canje? Se espera que el alumno descubra que para multiplicar D0, C00, U_m000 por un número de 1 cifra (sin canje), basta multiplicar por D, C ó U_m y agregar uno ó más ceros al multiplicador para obtener el producto. Materiales: Tarjetas numéricas para el multiplicador y para el multiplicando.</p>	
<p>Prof.: Pensemos en cómo se encuentra el producto, la forma de operar para llegar a la solución del problema.</p> <p>Situación problema: Se vende bolitas a \$ 20 cada una. ¿Cuánto cuestan 3 bolitas?</p> <p>Prof. (procura que se den cuenta que pueden encontrar el producto pensando cuántas decenas hay). Pueden usar tarjetas numéricas como apoyo. Calculen individualmente y luego saldrán a la pizarra.</p> <p>Alumno 1: \$20 son 2 monedas de \$10. 3 veces 2 monedas de \$10 son 6 \$10. Alumno 2: 2 grupos de 10 tres veces, son 6 grupos de 10. Alumno 3: 20 son 2 decenas, y 3 veces 2 decenas, son 6 decenas. Los alumnos concluyen $20 \times 3 = 60$ y sale uno a la pizarra.</p>	<p>Puntos a considerar</p> <p>Leer el problema y entender su situación. Que noten que es de tipo multiplicativa. Piensan en calcular (un número de 2 cifras) x (un número de 1 cifra).</p> <p>Escribir la operación. Confirman el sentido de la multiplicación.</p> <p>Encontrar la respuesta: Después de pensar la resolución individualmente, hacer que expresen la forma de resolución y sean capaces de comprender el producto en términos de decenas.</p> <p>Pensar en la forma de calcular: 200×3 y 2000×3.</p> <p>En este tipo de multiplicación, se encuentra el producto pensando cuántas decenas (ó centenas, ó unidades de mil) hay.</p> <p>Resolver: Ejercicios de aplicación</p>
<p>Pizarra: ¿Cuánto es 20×3? 2 decenas $\times 3 = 6$ decenas. Respuesta: \$ 60</p>	
<p>Prof.: Piensen cuánto es el producto 200×3 y 2000×3 Alumnos trabajan y luego uno sale a la pizarra.</p>	
<p>Pizarra: ¿Cuánto es 200×3? 2 centenas $\times 3 = 6$ centenas. Respuesta: \$ 600</p>	
<p>Prof. (basado en las expresiones de los alumnos): Tenemos que (2×3) centenas = 600, y también, (2×3) unidades de mil = 6000, ó 100 veces (2×3), y también, 1000 veces (2×3).</p> <p>Prof.: Calculen.</p>	
<p>Pizarra:</p> <p>(1) $20 \times 4 =$ (2) $30 \times 3 =$ (3) $40 \times 2 =$ (4) $30 \times 1 =$ (5) $200 \times 4 =$ (6) $400 \times 2 =$ (7) $300 \times 3 =$ (8) $300 \times 1 =$ (9) $3000 \times 3 =$ (10) $2000 \times 4 =$ (11) $4000 \times 2 =$ (12) $3000 \times 2 =$</p>	

UNIDAD MULTIPLICACIÓN CON 2 A 4 CIFRAS: SUBUNIDAD 1. MULTIPLICACIÓN CON CEROS (4 SESIONES)	
Sesión 4: Descubriendo la multiplicación por D0, C00 x U con canje. Página 1 de 1	
Objetivo de la sesión: Multiplicar D0, C00 x U, con canje.	
Pregunta Central: ¿Cómo calcular en multiplicaciones entre D0 ó C00 con un número de una cifra, con canje?	
Se espera que el alumno descubra que para multiplicar por D0, C00 por un número de 1 cifra (con canje), basta multiplicar por D, C ó UM y agregar uno ó más ceros al multiplicador para obtener el producto.	
Materiales: Tarjetas numéricas.	
<p>Situación problema: Se vende bombones a \$ 40 cada uno. ¿Cuánto cuestan 3 bombones?</p> <p>Prof.: Busquen la forma de operar para llegar a la solución del problema (procura que se den cuenta que pueden encontrar el producto pensando en cuántas monedas de 10 pesos vale un bombón; ó cuántos grupos de 10 ó de 100 hay; ó cuántas decenas ó centenas hay). Pueden usar tarjetas numéricas como apoyo.</p> <p>Alumnos ofrecen expresiones, como 4 grupos de 10 por 3 veces, ó 10 veces 4x3. Un alumno escribe en la pizarra.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>Pizarra: $40 \times 3 = 120$ $4 \text{ decenas} \times 3 = 12 \text{ decenas}$</p> </div> <p>Prof.: Concluimos que $(4 \times 3) \text{ decenas} = 120$ (plantea el problema con centenas). ¿Cuánto sería el valor total con bombones que cuestan \$ 400 cada uno?</p> <p>Alumnos analizan y comparten sus respuestas.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>Pizarra: $400 \times 3 = 1200$ $4 \text{ centenas} \times 3 = 12 \text{ centenas}$</p> </div> <p>Prof. (concluyendo): ¿Cuánto es el producto de 400×3 ?</p> <p>Prof.: Calculen.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>Pizarra:</p> <p><i>Ejercicio A</i></p> <p>(1) $20 \times 6 =$ (2) $30 \times 7 =$ (3) $60 \times 9 =$ (4) $40 \times 5 =$ (5) $500 \times 7 =$ (6) $700 \times 6 =$ (7) $900 \times 7 =$ (8) $600 \times 5 =$ (9) $800 \times 8 =$</p> <p><i>Ejercicio B</i></p> <p>Invente los ejercicios y resuélvalos:</p> <p>(1) C00 cm del tipo C00 x U, (2) D0 gr del tipo D0 x U.</p> </div>	<p>Puntos a considerar.</p> <p>Leer el problema y entender la situación.</p> <p>Pensar en la forma de calcular: 40×3.</p> <p>Aprovechar las expresiones de los niños para concluir.</p> <p>Pensar en la forma de calcular 400×3.</p> <p>Aprovechar las expresiones de los niños para concluir.</p> <p>Resolver: En el ejercicio A, los incisos (4) y (8) son más difíciles ya que en el producto se obtiene 0 en la centena. Si hay niños que tienen dificultad, explicarles el sentido del cálculo usando las tarjetas numéricas.</p>

UNIDAD MULTIPLICACIÓN CON 2 A 4 CIFRAS: SUBUNIDAD 2. MULTIPLIQUEMOS EN LA FORMA VERTICAL		(5 SESIONES) Página 1 de 2								
Sesión 1: Descubriendo la multiplicación entre números DU x U, sin canje. Objetivo de la Sesión: Multiplicar DU x U sin canje, en la forma vertical. Pregunta Central: ¿Cómo calcular multiplicaciones de números de 2 x 1 cifras? Se espera que el alumno descubra que para multiplicar números de 2 x 1 cifras es cómodo usar la multiplicación vertical. Materiales: Tarjetas numéricas.										
Situación problema: Hay 3 buses que llevan 21 pasajeros cada uno. ¿Cuántos pasajeros llevan en total? Prof.: (Tras presentar el problema) Planteen la operación. Los alumnos entienden que se trata de multiplicar 21 x 3. Prof.: Estimen ¿Más o menos cuánto será la respuesta? Los alumnos hacen estimaciones cercanas a 60. Prof.: Escribe 3 estimaciones en la pizarra con los nombres de los niños que las propusieron. Prof.: Encuentren la respuesta pensando en la forma de calcular. Trabajen individualmente, pueden usar tarjetas. Algunos alumnos descomponen 21 en 20 y 1; otros, en 10, 10 y 1. Algunos se ayudan con las tarjetas. El profesor observa el trabajo de los alumnos. Tarjetas: <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px 0; text-align: center;"> <table style="margin: auto;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">10</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">10</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">1</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">10</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">10</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">1</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">10</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">10</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">1</td> </tr> </table> </div> Alumno 1 (estima en la pizarra): 21 y 21 y 21 es 63 Alumno 2 (estima en la pizarra): 3 veces (10+10) más algo. Prof. (comenta la aproximación): Si se aproxima 21 pasajeros a 20, la respuesta es más o menos 20 x 3. Se puede aproximar a más o menos 60. ¿Cuántos pasajeros habrán más que 60? Alumno: Habrá 1x3 = 3 pasajeros. Alumno 1 (en la pizarra explica): Se calcula la cantidad total de las unidades y las decenas separadas. 21 x 3 es lo mismo que 20x3=60 y 1x3=3. Son 60 pasajeros más 3 pasajeros, 63.	10	10	1	10	10	1	10	10	1	Puntos a considerar Leer el problema y entender la situación. Escribir el planteamiento de la operación. Estimar el producto: Es importante la capacidad de estimar la cantidad aproximada. En el cálculo, esta capacidad sirve no sólo para evitar la equivocación, sino también para comprender el procedimiento del cálculo vertical. La estimación es usada para conducir a la forma del cálculo vertical de "21 x 3". Pensar en la forma de encontrar el producto. Las tarjetas pueden ayudar. Expresar las opiniones. Noten y comenten la conveniencia de pensar separando las decenas de las unidades.
10	10	1								
10	10	1								
10	10	1								

UNIDAD MULTIPLICACIÓN CON 2 A 4 CIFRAS:

SUBUNIDAD 2. MULTIPLIQUEMOS EN LA FORMA VERTICAL

(5 SESIONES)

Sesión 1: Descubriendo la multiplicación de números DU x U, con canje. **Página 2 de 2**

Objetivo de la Sesión: Multiplicar DU x U sin canje, en la forma vertical.

Prof.: Piensen en la forma vertical de 21×3 . (El profesor introduce el formato a partir de las ideas de los alumnos).

$\begin{array}{r} (1) \\ 21 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} (2) \text{ Unidades} \\ 21 \\ \times 3 \\ \hline 3 \end{array}$ <p style="text-align: center;">3 por 1 es 3</p>	$\begin{array}{r} (3) \text{ Decenas} \\ 21 \\ \times 3 \\ \hline 63 \end{array}$ <p style="text-align: center;">3 por 2 es 6</p>
--	---	---

1. Coloquen el multiplicando y multiplicador verticalmente, ubicando las unidades en una misma columna.
2. Calculen primero las unidades, $1 \times 3 = 3$ y escribir "3" en las unidades. (En este caso es mejor decir 3 por 1, cambiando el orden, para utilizar una sola tabla de la multiplicación. Desde ahora siempre vamos a usar la tabla de los números del multiplicador).
3. Luego, calcular las decenas $3 \times 2 = 6$ y escribir el 6 en las decenas.

Prof.: Calculen 20×3 en la forma vertical.

Alumno en la pizarra:

$$\begin{array}{r} 20 \\ \times 3 \\ \hline 60 \end{array}$$

Prof.: ¿Qué parece más conveniente, usar la tabla del número del multiplicador o la del multiplicando? ¿Cuál hemos usado?

Alumnos no responden.

Prof.: Practiquen con los siguientes ejercicios:

Calcule:

(1) 24	(2) 43	(3) 12	(4) 11	(5) 30
$\times 2$	$\times 2$	$\times 4$	$\times 7$	$\times 3$

Calcule en la forma vertical:

(1) 13×2	(2) 21×4	(3) 32×3	(4) 20×4
(5) 23×3	(6) 34×2	(7) 44×2	(8) 11×9

Pensar en la forma vertical:

El profesor introduce el cálculo vertical escuchando las ideas de los alumnos.

Si no surgen las ideas, se puede esperar hasta la siguiente clase.

En este caso, se puede resolver aunque el cálculo se empiece desde las decenas porque no hay canje.

No es recomendable obligar sin razón a que empiecen desde las unidades sino que descubran la inconveniencia mediante la discusión.

Calcular:
Al resolver 20×3 , confirmar el manejo de 0.

Resolver:
ejercicios.

<p>UNIDAD MULTIPLICACIÓN CON 2 A 4 CIFRAS: SUBUNIDAD 2. MULTIPLIQUEMOS EN LA FORMA VERTICAL (5 SESIONES) Sesión 2: Página 1 de 1</p> <p>Descubriendo la multiplicación con canje entre números DU x U, con canje. Objetivo de la Sesión: Multiplicar en forma vertical DU x U, con canje de las unidades a las decenas. Pregunta Central: ¿Cómo multiplicar en forma vertical números de 2 cifras x uno de 1 cifra, con canje desde las unidades? Se espera que el alumno descubra que para multiplicar números de 2 cifras por 1 cifra, canjeando desde las unidades, puede usar la multiplicación vertical. Materiales: Tarjetas numéricas.</p>										
<p>Situación problema: Para cercar un jardín se necesitan 27 metros de alambre. ¿Cuántos metros de alambre se necesitan para cercar 3 jardines como el anterior?</p> <p>Prof.: Escriban el procedimiento operatorio y encuentren la respuesta pensando en la forma vertical de cálculo.</p> <p>Alumnos identifican el procedimiento 27x3 y buscan la respuesta, algunos intentan la forma vertical.</p> <p>Prof. (tras el trabajo de los alumnos en sus bancos): Ahora algunos compañeros mostrarán su trabajo (invita a la pizarra).</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> $\begin{array}{r} 27 \\ \times 3 \\ \hline 21 \dots 7 \times 3 \\ 60 \dots\dots 20 \times 3 \\ \hline 81 \end{array}$ </div> <p>Un alumno trabaja en la pizarra y el profesor lo orienta por medio de preguntas.</p> <p>Prof.: ¿Qué diferencia tiene este cálculo con el anterior? (procurando que se den cuenta que al multiplicar las unidades el producto es un número de dos cifras).</p> <p>Otro alumno desarrolla con canje. El profesor pide que explique cada paso.</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin: 5px 0;"> <thead> <tr> <th style="width: 33%; text-align: center;">(1)</th> <th style="width: 33%; text-align: center;">(2) Unidades</th> <th style="width: 33%; text-align: center;">(3) Decenas</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">$\begin{array}{r} 27 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$</td> <td style="text-align: center;">$\begin{array}{r} 27 \\ \times 3 \\ \hline 21 \\ 1 \end{array}$</td> <td style="text-align: center;">$\begin{array}{r} 27 \\ \times 3 \\ \hline 82 \\ 2 \end{array}$</td> </tr> <tr> <td>Coloco los números ordenadamente.</td> <td>3 por 7, 21 unidades. Anoto 1 y canjeo 20 unidades por 2 decenas.</td> <td>3 por 2, 6. 6 más 2 decenas, 8.</td> </tr> </tbody> </table> <p>Prof.: Calcular en la forma vertical 15x6. ¿Qué notan en las unidades? Los alumnos trabajan en sus bancos y muchos lo hacen con fluidez, pero varios usan sumas en vez de multiplicación. Un alumno resuelve el problema, sus compañeros apoyan. Prof. (escribe ejercicios en la pizarra): Resolver (1) 26x3 (2) 37x2 (3) 16x6 (4) 24x4 (5) 19x5 (6) 49x2</p>	(1)	(2) Unidades	(3) Decenas	$\begin{array}{r} 27 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 27 \\ \times 3 \\ \hline 21 \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 27 \\ \times 3 \\ \hline 82 \\ 2 \end{array}$	Coloco los números ordenadamente.	3 por 7, 21 unidades. Anoto 1 y canjeo 20 unidades por 2 decenas.	3 por 2, 6. 6 más 2 decenas, 8.	<p>Puntos a considerar Leer y entender su situación. Escribir el procedimiento. Pensar en la forma vertical y encontrar respuesta: El profesor procura que se centren en el canje. Plantea ¿qué significa el número 21?</p> <p>Expresar las opiniones: El profesor intenta que se den cuenta que es mejor empezar el cálculo desde las unidades.</p> <p>Concluir el proceso de la forma vertical: Recomienda usar números auxiliares para no olvidar el canje y decir el proceso en voz alta, para afianzar la comprensión.</p> <p>Calcular: 15x6 para confirmar el caso con cero.</p> <p>Resolver: Ejercicios para afianzar el conocimiento.</p>
(1)	(2) Unidades	(3) Decenas								
$\begin{array}{r} 27 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 27 \\ \times 3 \\ \hline 21 \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 27 \\ \times 3 \\ \hline 82 \\ 2 \end{array}$								
Coloco los números ordenadamente.	3 por 7, 21 unidades. Anoto 1 y canjeo 20 unidades por 2 decenas.	3 por 2, 6. 6 más 2 decenas, 8.								

UNIDAD MULTIPLICACIÓN CON 2 A 4 CIFRAS:

SUBUNIDAD 2: MULTIPLIQUEMOS EN LA FORMA VERTICAL

(5 SESIONES)

Sesión 3:

Página 1 de 1

Descubriendo la multiplicación entre números DU x U, con canje en la decena.

Objetivo de la Sesión: Multiplicar DU x U, con canje en el proceso de D x U, en la forma vertical.

Pregunta Central: ¿Cómo multiplicar en forma vertical números de 2 cifras x uno de 1 cifra, con canje desde las unidades?

Se espera que el alumno comprenda la forma de encontrar el producto entre un número de 2 cifras y uno de 1 cifra, con canje en las decenas, en la multiplicación vertical.

Materiales: Tarjetas numéricas.

Prof. (plantea el problema): Lean en silencio.

Situación problema: Mi hermano lee 21 páginas del libro al día ¿Cuántas páginas lee en 7 días?

Prof.: Escriban el procedimiento operatorio (Los alumnos lo hacen bien. 21×7).

Prof.: Encuentren la respuesta pensando en la forma vertical del cálculo.

Los alumnos trabajan en sus cuadernos y escriben procesos como el siguiente.

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 7 \\ \hline 140 \\ \hline 147 \end{array}$$

Prof.: ¿Cuál es la diferencia entre este cálculo y el cálculo anterior?

Los alumnos se dan cuenta que al multiplicar las decenas el producto es de 2 cifras.

(1)	(2) Unidades	(3) Decenas y Centenas
$\begin{array}{r} 2 \quad 1 \\ \times \quad 7 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \quad 1 \\ \times \quad 7 \\ \hline 7 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \quad 1 \\ \times \quad 7 \\ \hline 1 \quad 4 \quad 7 \end{array}$
Colocar los números ordenadamente.	7 por 1, 7. Anota 7.	7 por 2, 14 decenas. Anota 4 en la decena y 1 en la centena.

Prof.: Calcule 52×4 y encuentre la respuesta pensando la forma vertical.

$$\begin{array}{l} 4 \times 2, \text{ 8 unidades.} \\ 4 \times 5 \text{ 20, es decir 2 centenas.} \\ \text{No hay decenas.} \\ \text{Es 208.} \end{array}$$

1. Calcule.

- (1) 63×3 (2) 82×4 (3) 71×6 (4) 94×2 (5) 81×9
 (6) 61×5 (7) 54×2 (8) 51×8 (9) 50×6 (10) 20×5

2. Calcule en la forma vertical.

- (1) 62×4 (2) 71×9 (3) 51×6 (4) 40×5 (5) 93×3

Puntos a considerar

Leer el problema y entender su situación.

Escribir el procedimiento operatorio.

Pensar en la forma vertical y encontrar respuesta:

Se puede usar las tarjetas numéricas como apoyo.

Expresar las opiniones:

Los alumnos dicen cómo lo hacen.

Concluir: el proceso de la forma vertical del cálculo.

El profesor aclara la razón de escribir 1, del 14, en las centenas y 4 en la decena. Aprovecha las expresiones de los niños y utiliza el canje de las decenas en centenas.

Calcular:

52×4 para confirmar el manejo del cero.

Resolver: ejercicios 1 y ejercicios 2.

<p>UNIDAD MULTIPLICACIÓN CON 2 A 4 CIFRAS: SUBUNIDAD 2: MULTIPLIQUEMOS EN LA FORMA VERTICAL (5 SESIONES) Sesión 4: Descubriendo la multiplicación DU x U, con canje en el proceso. Página 1 de 1 Objetivo de la Sesión: Multiplicar DU x U canjeando en el proceso de UxU y DxU, y canjeando en el proceso de sumar los productos parciales en la forma vertical. Pregunta Central: ¿Cómo multiplicar en forma vertical números de 2 cifras x uno de 1 cifra, con canje tanto desde las unidades como en las decenas? Se espera que el alumno comprenda cómo multiplicar números de 2 cifras y uno de 1 cifra, canjeando sucesivamente tanto en las unidades como en las decenas, en la multiplicación vertical. Materiales: Tarjetas numéricas.</p>				
<p>Prof. (plantea el problema en la pizarra): Situación problema: Hay 6 cajas. En cada caja se ponen 23 naranjas. ¿Cuántas naranjas se pusieron en todas las cajas? Prof.: Escriban el procedimiento operatorio. (Los alumnos lo hacen bien. 23x6).</p> <p>Prof.: Encuentren la respuesta pensando en la forma vertical del cálculo.</p> <p>Alumno: Creo que puedo resolver aplicando lo aprendido (alumnos trabajan en sus puestos).</p> <p>Prof.: Pueden usar las tarjetas numéricas como apoyo. Fíjense en las cifras de los productos parciales.</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-top: 10px;"> <tr> <td style="width: 33%; text-align: center; vertical-align: top;"> <p>(1)</p> $\begin{array}{r} 23 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$ <p>Colocar los números ordenadamente.</p> </td> <td style="width: 33%; text-align: center; vertical-align: top;"> <p>(2) Unidades</p> $\begin{array}{r} 23 \\ \times 6 \\ \hline 18 \end{array}$ <p>6 por 3, 18. Escribir 8 y canjear 10 unidades.</p> </td> <td style="width: 33%; text-align: center; vertical-align: top;"> <p>(3) Decenas</p> $\begin{array}{r} 23 \\ \times 6 \\ \hline 138 \end{array}$ <p>6 por 2, 12 12 más una decena extra, 13 7 por 2, 14 decenas. Anoto 4 en la decena y 1 en la centena.</p> </td> </tr> </table> <p>Fíjense en las cifras de los subproductos.</p> <p>Prof. (apoyando las explicaciones de los alumnos): ¿Cuál es la diferencia entre este cálculo y el cálculo anterior?</p> <p>Prof.: Calculen 67x8 y 18x6 en la forma vertical. ¿Qué observan en estos ejercicios?</p> <p>Alumno: Cuando sumemos, debemos tener cuidado pues llegaremos hasta las centenas.</p> <p>Prof.: Calculen.</p> <p>(1) 34 x 7 (2) 45 x 3 (3) 63 x 9 (4) 97 x 5 (5) 73 x 8 (6) 26 x 9 (7) 38 x 6 (8) 59 x 7 (9) 39 x 8 (10) 85 x 6 (11) 37x3 (12)56 x 2 (13) 26x4 (14)85x 9 (15)25 x 4</p> <p>Prof.: Calculen usando la forma vertical. (1) 46 x 7 (2) 66 x 8 (3) 75 x 8 (4) 34 x 3</p>	<p>(1)</p> $\begin{array}{r} 23 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$ <p>Colocar los números ordenadamente.</p>	<p>(2) Unidades</p> $\begin{array}{r} 23 \\ \times 6 \\ \hline 18 \end{array}$ <p>6 por 3, 18. Escribir 8 y canjear 10 unidades.</p>	<p>(3) Decenas</p> $\begin{array}{r} 23 \\ \times 6 \\ \hline 138 \end{array}$ <p>6 por 2, 12 12 más una decena extra, 13 7 por 2, 14 decenas. Anoto 4 en la decena y 1 en la centena.</p>	<p>Puntos a considerar</p> <p>Leer y entender la situación.</p> <p>Escribir el procedimiento operatorio.</p> <p>Pensar en la forma vertical y encontrar respuesta:</p> <p>El profesor procura que se den cuenta que al multiplicar tanto las unidades como las decenas los productos parciales son de 2 cifras.</p> <p>Expresar las opiniones:</p> <p>Los alumnos comparten cómo lo hacen.</p> <p>Concluir el proceso de la forma vertical del cálculo.</p> <p>Calcular:</p> <p>75x4 y 18x6 para confirmar el manejo de cero.</p> <p>Surgen errores, el profesor tiene el cuidado de ir confirmando.</p> <p>Resolver: ejercicios.</p>
<p>(1)</p> $\begin{array}{r} 23 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$ <p>Colocar los números ordenadamente.</p>	<p>(2) Unidades</p> $\begin{array}{r} 23 \\ \times 6 \\ \hline 18 \end{array}$ <p>6 por 3, 18. Escribir 8 y canjear 10 unidades.</p>	<p>(3) Decenas</p> $\begin{array}{r} 23 \\ \times 6 \\ \hline 138 \end{array}$ <p>6 por 2, 12 12 más una decena extra, 13 7 por 2, 14 decenas. Anoto 4 en la decena y 1 en la centena.</p>		

<p>UNIDAD MULTIPLICACIÓN CON 2 A 4 CIFRAS: SUBUNIDAD 2. MULTIPLICACIÓN EN FORMA VERTICAL (5 SESIONES) Sesión 5: Ejercitando la multiplicación de números DU x U. Página 1 de 1 Objetivo de la Sesión: Multiplicar DU x U con canje en el proceso de UxU y DxU, y canjeando en el proceso de sumar los productos parciales en la forma vertical, al resolver los ejercicios y problemas de la aplicación de la multiplicación de DU x U. Pregunta Central: ¿Recuerdan los procedimientos para multiplicar en forma vertical, con canje, números de 2 ó más cifras por uno de 1 cifra? Se espera que el alumno consolide sus aprendizajes a partir de la ejercitación.</p>							
<p>Prof.: Calculen mentalmente:</p> <p>(1) 40 x 2 (2) 50 x 7 (3) 70 x 9 (4) 80 x 5 (5) 200 x 3 (6) 300 x 4 (7) 600 x 7 (8) 500 x 6</p> <p>Prof. (entregando una guía con ejercicios): Realicen los ejercicios según las indicaciones.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Ejercicios:</p> <p>1. Complete los números donde corresponda: 36 x 5 se obtiene sumando _ x 5 y _ x 5. 49 x 7 se obtiene sumando 40 x_ y 9 x ...</p> <p>2. Calcule en la forma vertical:</p> <p>(1) 44x2 (2) 31x0 (3) 47x2 (4) 16x5 (5) 93x3 (6) 50x4 (7) 68 x4 (8) 58x9 (9) 72x7 (10)86x6</p> <p>3. Encuentre los errores y calcule correctamente:</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">95</td> <td style="text-align: center;">43</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><u> x 6</u></td> <td style="text-align: center;"><u> x 7</u></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">5430</td> <td style="text-align: center;">281</td> </tr> </table> <p>4. Resuelva los siguientes problemas.</p> <p>a) En una competencia deportiva participaron 8 escuelas con 25 niños y niñas cada una. ¿Cuántos niños y niñas participaron en total?</p> <p>b) Para la actividad escolar se necesitan 8 cintas de 88 cm cada una. ¿Cuántos centímetros de cinta se necesitan en total?</p> <p>5. Invente problemas en los que el procedimiento operatorio sea de la forma __ x __ y resuélvalos.</p> </div> <p>Los alumnos tienen tiempo para realizar los ejercicios. Cada cierto tiempo, salen grupos de alumnos a la pizarra y son revisados uno a uno los ejercicios.</p>	95	43	<u> x 6</u>	<u> x 7</u>	5430	281	<p>Puntos a considerar</p> <p>Cálculo mental: de la multiplicación D0 x U, C00 x U.</p> <p>Cálculo escrito:</p> <p>Principio del cálculo vertical de la multiplicación.</p> <p>Cálculo en la forma vertical de la multiplicación DU x U. (1)-(2) sin canje. (3)-(4) canjeando en U x U. (5)(6) canjeando en D x U. (7)(10) con canje en U x U y D x U, o canjeando al sumar los productos parciales.</p> <p>Proceso del cálculo vertical de la multiplicación. El primer error está en el valor posicional, en el segundo olvidó el canje.</p> <p>Problemas de aplicación.</p> <p>Construcción de problemas con DUxU con canje en las unidades, con canje en las decenas, y con canje en ambas.</p>
95	43						
<u> x 6</u>	<u> x 7</u>						
5430	281						

UNIDAD MULTIPLICACIÓN CON 2 A 4 CIFRAS:

SUBUNIDAD 3. SIGAMOS MULTIPLICANDO VERTICALMENTE

(5 SESIONES)

Sesión 1: Descubriendo la multiplicación CDU x U, sin canje.

Página 1 de 1

Objetivo de la Sesión: Multiplicar en forma vertical CDU x U, sin canje.

Pregunta Central: ¿Cómo multiplicar en forma vertical números de 3 cifras x uno de 1 cifra, sin canje?

Se espera que el alumno descubra que para multiplicar números de 3 cifras por 1 cifra, sin canje, puede usar la multiplicación vertical.

Materiales: Tarjetas numéricas.

Situación problema: La pista para correr tiene 213 m en una vuelta. ¿Cuántos metros recorren si se dan 3 vueltas?
 Prof.: Escriban el procedimiento operatorio y estimen más o menos cuánto será la respuesta.

Alumnos escriben 213×3 y estiman algo más que 600.

Prof. (anotando algunas estimaciones): Encuentren la respuesta pensando en la forma vertical de calcular.

Alumno 1: $213 + 213 + 213 = 639$.

Alumno 2: $200 \times 3 = 600$, $10 \times 3 = 30$, $3 \times 3 = 9$, $600 + 30 + 9 = 639$.

Alumno 3: hay 6 grupos de 100, 3 grupos de 10 y 9 de 1.

100	100	10	1	1	1
100	100	10	1	1	1
100	100	10	1	1	1

200 x 3 10x3 3 x 3

Alumno 4 (usa tarjetas): 213 se descompone en 200, 10 y 3. Se calcula el total de las unidades, las decenas y las centenas separadas. 213×3 .

Prof.: Piensen en la forma vertical de 213×3 , ¿Cómo sería el cálculo vertical?

(1) Unidades	(2) Decenas	(3) Centenas
2 1 3	2 1 3	2 1 3
x 3	x 3	x 3
-----	-----	-----
9	3 9	6 3 9
3 x 3, 9.	3 por 1, 3.	3 por 2, 6.

Prof.: Calculen en la forma vertical 104×2 . En este caso, ¿hay decenas?

Prof.: Calculen.

(1) 143×2 (2) 211×4 (3) 312×3 (4) 240×2

Prof. (en la pizarra): Calculen en la forma vertical

(1) 122×4 (2) 321×3 (3) 110×7 (4) 203×3

Puntos a considerar

Leer el problema y entender su situación.
 Piensan en cómo calcular (un número de 3 cifras) x (un número de 1 cifra).

Estimar el producto

Pensar en la forma de encontrar el producto:

Los alumnos trabajan en sus puestos con sus estrategias. Algunos usan tarjetas.

Expresar las opiniones:

Los alumnos se dan cuenta y comentan que el producto se encuentra separando el multiplicando en centenas, decenas y unidades.

Pensar en la forma vertical:

Los alumnos descubren aplicando el cálculo vertical de DU x U, y escriben el procedimiento operatorio. El profesor explica el proceso del cálculo vertical desde las ideas de los niños y de las niñas.

Calcular:

104×2 para confirmar el caso con cero.

Resolver:

Ejercicios.

UNIDAD MULTIPLICACIÓN CON 2 A 4 CIFRAS: SUBUNIDAD 3. SIGAMOS MULTIPLICANDO VERTICALMENTE		(5 SESIONES) Página 1 de 1		
Sesión 2: Descubriendo la multiplicación CDU x U, con canje en las unidades y/o decenas.				
Objetivo de la Sesión: Multiplicar en forma vertical CDU x U, con canje, en unidades o decenas.				
Pregunta Central: ¿Cómo multiplicar en forma vertical números de 3 cifras x uno de 1 cifra, con canje en las unidades y/o decenas?				
Se espera que el alumno descubra cómo multiplicar números de 3 cifras por 1 cifras, con canje en las unidades y/o decenas, con la multiplicación vertical.				
Materiales: Tarjetas numéricas.				
Prof.: Piensen en la forma vertical de 427x 2, 182x3 y 378 x 2.		Puntos a considerar Entender el tema Pensar en la forma del cálculo vertical: 427 x 2, con canje en las unidades. Tras resolver individualmente, el profesor pide que expresen las opiniones. Pensar en la forma del cálculo vertical: 182 x 3, con canje en las decenas. Tras resolver, el profesor pide las opiniones. Pensar en la forma del cálculo vertical: 378 x 2, con canje en unidades y decenas. Tras resolver, el profesor pide que compartan las opiniones.		
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 33%; text-align: center;"> (1) Unidades $\begin{array}{r} 4 \quad 2 \quad 7 \\ \times \quad 2 \\ \hline 1 \quad 4 \end{array}$ </td> <td style="width: 33%; text-align: center;"> (2) Decenas $\begin{array}{r} 4 \quad 2 \quad 7 \\ \times \quad 2 \\ \hline 5^1 \quad 4 \end{array}$ </td> <td style="width: 33%; text-align: center;"> (3) Centenas $\begin{array}{r} 4 \quad 2 \quad 7 \\ \times \quad 5 \quad 2 \\ \hline 8 \quad 5^1 \quad 4 \end{array}$ </td> </tr> </table>	(1) Unidades $\begin{array}{r} 4 \quad 2 \quad 7 \\ \times \quad 2 \\ \hline 1 \quad 4 \end{array}$		(2) Decenas $\begin{array}{r} 4 \quad 2 \quad 7 \\ \times \quad 2 \\ \hline 5^1 \quad 4 \end{array}$	(3) Centenas $\begin{array}{r} 4 \quad 2 \quad 7 \\ \times \quad 5 \quad 2 \\ \hline 8 \quad 5^1 \quad 4 \end{array}$
(1) Unidades $\begin{array}{r} 4 \quad 2 \quad 7 \\ \times \quad 2 \\ \hline 1 \quad 4 \end{array}$	(2) Decenas $\begin{array}{r} 4 \quad 2 \quad 7 \\ \times \quad 2 \\ \hline 5^1 \quad 4 \end{array}$		(3) Centenas $\begin{array}{r} 4 \quad 2 \quad 7 \\ \times \quad 5 \quad 2 \\ \hline 8 \quad 5^1 \quad 4 \end{array}$	
Algunos alumnos y el profesor usan tarjetas para explicar				
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 33%; text-align: center;"> (1) Unidades $\begin{array}{r} 1 \quad 8 \quad 2 \\ \times \quad 3 \\ \hline 6 \end{array}$ </td> <td style="width: 33%; text-align: center;"> (2) Decenas $\begin{array}{r} 1 \quad 8 \quad 2 \\ \times \quad 3 \\ \hline 2 \quad 4 \quad 6 \end{array}$ </td> <td style="width: 33%; text-align: center;"> (3) Centenas $\begin{array}{r} 1 \quad 8 \quad 2 \\ \times \quad 3 \\ \hline 5^2 \quad 4 \quad 6 \end{array}$ </td> </tr> </table>	(1) Unidades $\begin{array}{r} 1 \quad 8 \quad 2 \\ \times \quad 3 \\ \hline 6 \end{array}$		(2) Decenas $\begin{array}{r} 1 \quad 8 \quad 2 \\ \times \quad 3 \\ \hline 2 \quad 4 \quad 6 \end{array}$	(3) Centenas $\begin{array}{r} 1 \quad 8 \quad 2 \\ \times \quad 3 \\ \hline 5^2 \quad 4 \quad 6 \end{array}$
(1) Unidades $\begin{array}{r} 1 \quad 8 \quad 2 \\ \times \quad 3 \\ \hline 6 \end{array}$	(2) Decenas $\begin{array}{r} 1 \quad 8 \quad 2 \\ \times \quad 3 \\ \hline 2 \quad 4 \quad 6 \end{array}$	(3) Centenas $\begin{array}{r} 1 \quad 8 \quad 2 \\ \times \quad 3 \\ \hline 5^2 \quad 4 \quad 6 \end{array}$		
Prof.: ¿Que pueden comentar acerca de este cálculo vertical? Alumno: Se requiere cuidado para no olvidar el canje. Prof.: Calculen en forma vertical 378 x 2.				
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 33%; text-align: center;"> (1) Unidades $\begin{array}{r} 3 \quad 7 \quad 8 \\ \times \quad 2 \\ \hline 1 \quad 6 \end{array}$ </td> <td style="width: 33%; text-align: center;"> (2) Decenas $\begin{array}{r} 3 \quad 7 \quad 8 \\ \times \quad 2 \\ \hline 1 \quad 5^1 \quad 6 \end{array}$ </td> <td style="width: 33%; text-align: center;"> (3) Centenas $\begin{array}{r} 3 \quad 7 \quad 8 \\ \times \quad 2 \\ \hline 7^1 \quad 5^1 \quad 6 \end{array}$ </td> </tr> </table>	(1) Unidades $\begin{array}{r} 3 \quad 7 \quad 8 \\ \times \quad 2 \\ \hline 1 \quad 6 \end{array}$	(2) Decenas $\begin{array}{r} 3 \quad 7 \quad 8 \\ \times \quad 2 \\ \hline 1 \quad 5^1 \quad 6 \end{array}$	(3) Centenas $\begin{array}{r} 3 \quad 7 \quad 8 \\ \times \quad 2 \\ \hline 7^1 \quad 5^1 \quad 6 \end{array}$	
(1) Unidades $\begin{array}{r} 3 \quad 7 \quad 8 \\ \times \quad 2 \\ \hline 1 \quad 6 \end{array}$	(2) Decenas $\begin{array}{r} 3 \quad 7 \quad 8 \\ \times \quad 2 \\ \hline 1 \quad 5^1 \quad 6 \end{array}$	(3) Centenas $\begin{array}{r} 3 \quad 7 \quad 8 \\ \times \quad 2 \\ \hline 7^1 \quad 5^1 \quad 6 \end{array}$		
Prof.: Calculen: (1) 214 x 3 (2) 329 x 2 (3) 115 x 6 (4) 306 x 3 (5) 205 x 4 (6) 391 x 2 (7) 182 x 4 (8) 271 x 3 (9) 435 x 2 (10) 180 x 4 (11) 486 x 2 (12) 189 x 5 (13) 275 x 3 (14) 177 x 4 (15) 178 x 5				
Prof.: Calculen en la forma vertical (1) 328 x3 (2) 171 x5 (3) 367 x2 (4) 105 x6 (5) 267 x3				

Nota: Los cálculos para la clase incluyen 1 ó 2 veces con canje, pero no afectan en el momento de sumar los productos parciales (no hay canje en la centena al sumar los productos parciales). Hay que tener cuidado al inventar otros ejercicios suplementarios.

UNIDAD MULTIPLICACIÓN CON 2 A 4 CIFRAS: SUBUNIDAD 3. SIGAMOS MULTIPLICANDO VERTICALMENTE		(5 SESIONES)						
Sesión 3: Descubriendo la multiplicación entre números CDU x U, con canje en las centenas y en la suma de productos parciales.		Página 1 de 2						
Objetivo de la Sesión: Multiplicar en forma vertical CDU x U, con canje, en las centenas y en la suma de los productos parciales.								
Pregunta Central: ¿Cómo multiplicar en forma vertical números de 3 cifras x uno de 1 cifra, con canje en las centenas y en la suma de los productos parciales?								
Se espera que el alumno descubra cómo multiplicar números de 3 cifras por 1 cifra, con canje en centenas y en la suma de productos parciales, con la multiplicación vertical.								
Materiales: Tarjetas numéricas.								
Prof.: Piensen en la forma vertical de 427×2 , 182×3 y 378×2 . Prof.: Ahora resuelvan en forma vertical 412×3 .		Puntos a considerar. Entender el tema. Pensar en la forma del cálculo vertical: 412×3 , con canje en las centenas. Tras resolver individualmente, el profesor pide que expresen las opiniones entre ellos y luego a la clase.						
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 33%; text-align: center;">(1) Unidades</th> <th style="width: 33%; text-align: center;">(2) Decenas</th> <th style="width: 33%; text-align: center;">(3) Centenas</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;"> $\begin{array}{r} 4 \quad 1 \quad 2 \\ \times \quad 3 \\ \hline 6 \end{array}$ </td> <td style="text-align: center;"> $\begin{array}{r} 4 \quad 1 \quad 2 \\ \times \quad 3 \\ \hline 3 \quad 6 \end{array}$ </td> <td style="text-align: center;"> $\begin{array}{r} 4 \quad 1 \quad 2 \\ \times \quad 3 \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \quad 6 \end{array}$ </td> </tr> </tbody> </table>			(1) Unidades	(2) Decenas	(3) Centenas	$\begin{array}{r} 4 \quad 1 \quad 2 \\ \times \quad 3 \\ \hline 6 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4 \quad 1 \quad 2 \\ \times \quad 3 \\ \hline 3 \quad 6 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4 \quad 1 \quad 2 \\ \times \quad 3 \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \quad 6 \end{array}$
(1) Unidades	(2) Decenas	(3) Centenas						
$\begin{array}{r} 4 \quad 1 \quad 2 \\ \times \quad 3 \\ \hline 6 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4 \quad 1 \quad 2 \\ \times \quad 3 \\ \hline 3 \quad 6 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4 \quad 1 \quad 2 \\ \times \quad 3 \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \quad 6 \end{array}$						
Algunos alumnos y el profesor usan tarjetas para explicar Alumno 1: 2×3 es 6, 10×3 es 30 y 400×3 es 1200. Luego, el resultado es 1236. Alumno 2: 12 centenas es 1 unidad de mil más 2 centenas. Ahora el producto tendrá 4 cifras. Además hay 3 decenas y 6 unidades, luego el resultado es 1236.		Pensar en la forma del cálculo vertical: 649×4 , con canje en la unidad, en las decenas, en las centenas y en los productos parciales. Tras resolver los alumnos, el profesor pide las opiniones.						
Prof.: Resolver 649×4 . ¿Cuántas cifras tendrá el producto?								
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 33%; text-align: center;">(1) Unidades</th> <th style="width: 33%; text-align: center;">(2) Decenas</th> <th style="width: 33%; text-align: center;">(3) Centenas</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;"> $\begin{array}{r} 6 \quad 4 \quad 9 \\ \times \quad 4 \\ \hline 3 \quad 6 \end{array}$ </td> <td style="text-align: center;"> $\begin{array}{r} 6 \quad 4 \quad 9 \\ \times \quad 4 \\ \hline 1 \quad 9^3 \quad 6 \end{array}$ </td> <td style="text-align: center;"> $\begin{array}{r} 6 \quad 4 \quad 9 \\ \times \quad 4 \\ \hline 2 \quad 5^1 \quad 9^3 \quad 6 \end{array}$ </td> </tr> </tbody> </table>		(1) Unidades	(2) Decenas	(3) Centenas	$\begin{array}{r} 6 \quad 4 \quad 9 \\ \times \quad 4 \\ \hline 3 \quad 6 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6 \quad 4 \quad 9 \\ \times \quad 4 \\ \hline 1 \quad 9^3 \quad 6 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6 \quad 4 \quad 9 \\ \times \quad 4 \\ \hline 2 \quad 5^1 \quad 9^3 \quad 6 \end{array}$	Resolver: Ejercicios. En los ejercicios (4) y (5), los alumnos podrían creer erróneamente que el producto puede tener sólo 3 cifras en vez de 4 cifras. El profesor atiende sus dudas.
(1) Unidades	(2) Decenas	(3) Centenas						
$\begin{array}{r} 6 \quad 4 \quad 9 \\ \times \quad 4 \\ \hline 3 \quad 6 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6 \quad 4 \quad 9 \\ \times \quad 4 \\ \hline 1 \quad 9^3 \quad 6 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6 \quad 4 \quad 9 \\ \times \quad 4 \\ \hline 2 \quad 5^1 \quad 9^3 \quad 6 \end{array}$						
Prof.: ¿Quién muestra cómo realizó el cálculo vertical? Alumno lo desarrolla en la pizarra usando tarjetas. Prof.: Calculen.								
<table style="width: 100%;"> <tbody> <tr> <td style="width: 33%;">(1) 364×8</td> <td style="width: 33%;">(2) 709×9</td> <td style="width: 33%;">(3) 251×6</td> </tr> <tr> <td>(4) 334×3</td> <td>(5) 252×4</td> <td>(6) 525×8</td> </tr> </tbody> </table>		(1) 364×8	(2) 709×9	(3) 251×6	(4) 334×3	(5) 252×4	(6) 525×8	
(1) 364×8	(2) 709×9	(3) 251×6						
(4) 334×3	(5) 252×4	(6) 525×8						

<p>UNIDAD MULTIPLICACIÓN CON 2 A 4 CIFRAS: SUBUNIDAD 3. SIGAMOS MULTIPLICANDO VERTICALMENTE (5 SESIONES) Sesión 3: Descubriendo la multiplicación entre números CDU x U, Página 2 de 2 con canje en las centenas y en la suma de productos parciales. Objetivo de la Sesión: Multiplicar en forma vertical CDU x U, con canje, en las centenas y en la suma de los productos parciales. Pregunta Central: ¿Cómo multiplicar en forma vertical números de 3 cifras x uno de 1 cifra, con canje en las centenas y en la suma de los productos parciales? Se espera que el alumno descubra cómo multiplicar números de 3 cifras por uno de 1 cifra, con canje en las centenas y en la suma de productos parciales, con la multiplicación vertical. Materiales: Tarjetas numéricas.</p>																			
<p>Prof.: Calculen en forma vertical 788×7. Pongan atención al hacer el canje.</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin: 10px 0;"> <tr> <td style="width: 33%; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>(1) Unidades</p> $\begin{array}{r} 7 \quad 8 \quad 8 \\ \times \quad \quad 7 \\ \hline \quad \quad 5 \quad 6 \end{array}$ </td> <td style="width: 33%; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>(2) Decenas</p> $\begin{array}{r} 7 \quad 8 \quad 8 \\ \times \quad \quad 7 \\ \hline 6 \quad 1^5 \quad 6 \end{array}$ </td> <td style="width: 33%; padding: 5px;"> <p>(3) Centenas</p> $\begin{array}{r} \quad \quad 7 \quad 8 \quad 8 \\ \times \quad \quad \quad 7 \\ \hline 5 \quad 5^6 \quad 1^5 \quad 6 \end{array}$ </td> </tr> </table> <p>Prof.: Calcule en la forma vertical.</p> <table style="width: 100%; margin: 10px 0;"> <tr> <td style="width: 33%;">(1) 921×4</td> <td style="width: 33%;">(2) 723×3</td> <td style="width: 33%;">(3) 634×2</td> </tr> <tr> <td>(4) 903×3</td> <td>(5) 820×4</td> <td>(6) 724×3</td> </tr> <tr> <td>(7) 892×3</td> <td>(8) 976×9</td> <td>(9) 352×5</td> </tr> <tr> <td>(10) 455×8</td> <td>(11) 873×6</td> <td>(12) 627×9</td> </tr> <tr> <td>(13) 164×8</td> <td>(14) 776×8</td> <td>(15) 867×6</td> </tr> </table> <p>Prof.: Calcule en la forma vertical.</p> <p>(1) 623×2 (2) 352×7 (3) 438×4 (4) 448×9 (5) 384×7</p>	<p>(1) Unidades</p> $\begin{array}{r} 7 \quad 8 \quad 8 \\ \times \quad \quad 7 \\ \hline \quad \quad 5 \quad 6 \end{array}$	<p>(2) Decenas</p> $\begin{array}{r} 7 \quad 8 \quad 8 \\ \times \quad \quad 7 \\ \hline 6 \quad 1^5 \quad 6 \end{array}$	<p>(3) Centenas</p> $\begin{array}{r} \quad \quad 7 \quad 8 \quad 8 \\ \times \quad \quad \quad 7 \\ \hline 5 \quad 5^6 \quad 1^5 \quad 6 \end{array}$	(1) 921×4	(2) 723×3	(3) 634×2	(4) 903×3	(5) 820×4	(6) 724×3	(7) 892×3	(8) 976×9	(9) 352×5	(10) 455×8	(11) 873×6	(12) 627×9	(13) 164×8	(14) 776×8	(15) 867×6	<p>Pensar en la forma del cálculo vertical:</p> <p>788×7, con canje al sumar los productos parciales.</p> <p>Tras resolver los alumnos, el profesor pide sus opiniones.</p> <p>Resolver: Ejercicios.</p> <p>Los incisos (4), (5), (9), (10), (14), (15) tienen 0 en los factores ó en el producto. Lo mismo sucede con los ejercicios siguientes (4) y (5) del cálculo vertical.</p> <p>El profesor toma en cuenta la dificultad y orienta general e individualmente.</p>
<p>(1) Unidades</p> $\begin{array}{r} 7 \quad 8 \quad 8 \\ \times \quad \quad 7 \\ \hline \quad \quad 5 \quad 6 \end{array}$	<p>(2) Decenas</p> $\begin{array}{r} 7 \quad 8 \quad 8 \\ \times \quad \quad 7 \\ \hline 6 \quad 1^5 \quad 6 \end{array}$	<p>(3) Centenas</p> $\begin{array}{r} \quad \quad 7 \quad 8 \quad 8 \\ \times \quad \quad \quad 7 \\ \hline 5 \quad 5^6 \quad 1^5 \quad 6 \end{array}$																	
(1) 921×4	(2) 723×3	(3) 634×2																	
(4) 903×3	(5) 820×4	(6) 724×3																	
(7) 892×3	(8) 976×9	(9) 352×5																	
(10) 455×8	(11) 873×6	(12) 627×9																	
(13) 164×8	(14) 776×8	(15) 867×6																	

<p>UNIDAD MULTIPLICACIÓN CON 2 A 4 CIFRAS: SUBUNIDAD 3. SIGAMOS MULTIPLICANDO VERTICALMENTE (5 SESIONES) Sesión 4: Resolviendo ejercicios y problemas de la aplicación de la multiplicación CDU x U, sin y con canje en las cifras y suma de productos parciales. Página 1 de 1 Objetivo de la Sesión: Resolver ejercicios y problemas de la aplicación de la multiplicación de números del tipo CDU x U. Pregunta Central: ¿Es capaz de multiplicar y usar la multiplicación de números de 3 cifras x uno de 1 cifra? Se espera que el alumno consolide las destrezas para multiplicar números de 3 cifras por uno de 1 cifra.</p>	
<p>Prof. (entrega una guía para trabajar): Trabajen el primer ejercicio y luego un alumno lo explica.</p>	<p>Puntos a considerar. Principios del cálculo vertical de la multiplicación. Cálculo vertical de la multiplicación. CDU x U: (1) y (2) sin canje. (3) a (7) con canje en unidades y/o decenas. (8) a (12) con canje en centenas, canjeando 2 ó 3 veces incluyendo en centenas, y/o canjeando al sumar los productos parciales. Proceso del cálculo vertical de la multiplicación. El error en (1) no hace el canje correspondiente, en (2) no suma el canje en la centena y el error en (3) está en el valor posicional. Problemas de aplicación. En 4.1 y 4.2 el producto contiene el cero. Construcción de problemas. Juego: Puede aplicar los ejercicios 2: (10), (11) y (12) u otros del mismo tipo.</p>
<p>Ejercicios y problemas</p> <p>1. Escriba en los espacios en blanco el número que corresponda. (1) El producto de 518×2 se encuentra sumando $\dots \times 2$, $\dots \times 2$ y $\dots \times 2$. (2) El producto de 467×3 se encuentra sumando $400 \times \dots$, $60 \times \dots$, y $7 \times \dots$.</p> <p>2. Calcule en la forma vertical:</p> <p>(1) 432×2 (2) 303×3 (3) 216×4 (4) 108×7 (5) 161×6 (6) 492×2 (7) 399×2 (8) 618×4 (9) 741×8 (10) 873×4 (11) 637×3 (12) 875×8</p> <p>3. Encuentre los errores y calcule correctamente.</p> <p>(1) $\begin{array}{r} 185 \\ \times 3 \\ \hline 3255 \end{array}$ (2) $\begin{array}{r} 276 \\ \times 4 \\ \hline 804 \end{array}$ (3) $\begin{array}{r} 504 \\ \times 2 \\ \hline 108 \end{array}$</p> <p>4. Resuelva los siguientes problemas. (1) Un barco transporta 365 marinos diariamente ¿Cuántos marinos transporta este barco en 3 días? (2) Hay 8 contenedores de carga. Cada contenedor pesa 638 kg. ¿Cuántos kilogramos pesan en total?</p> <p>5. Invente problemas, con canje al menos en las centenas, cuyo procedimiento de operación sea una multiplicación entre un número de 3 cifras y uno de 1 cifra, y resuélvalos.</p>	
<p>Prof. (les propone el juego del "Relevo del cálculo vertical"): Formen grupos de 4 alumnos para venir a la pizarra a resolver estos tres ejercicios, ocuparán la tiza como el relevo...</p>	

<p>UNIDAD MULTIPLICACIÓN CON 2 A 4 CIFRAS: SUBUNIDAD 3: SIGAMOS MULTIPLICANDO VERTICALMENTE (5 SESIONES) Sesión 5: Confirmando lo aprendido sobre la multiplicación CDU x U Página 1 de 1 Objetivo de la Sesión: Verificar y consolidar los aprendizajes adquiridos sobre la multiplicación de números del tipo CDU x U. Pregunta Central: ¿Multiplica y usa la multiplicación de números de 3 cifras x uno de 1 cifra? Se espera que el alumno sea capaz de usar la multiplicación de números de 3 cifras por uno de 1 cifra en la resolución de ejercicios y problemas.</p>	
<p>Prof. (entrega una guía para trabajar en clases): Trabajen el primer ejercicio y luego un alumno lo explica.</p>	<p>Puntos a considerar. Cálculo vertical de la multiplicación DU x U y CDU x U.</p> <p>Resolver: Problemas de aplicación.</p> <p>Encontrar el número: correspondiente a los dígitos ocultos en el cálculo vertical. Para los alumnos, los ejercicios 3.4 y 3.5 podrían llevarlos a errores en el canje y/o uso del 0.</p> <p>Pensar en los términos: El profesor explica el uso de los términos "doble", "triple" y "veces". Puede ocupar la situación, "compré el dulce a \$10 en el negocio del frente, porque aquí cuesta el doble".</p>
<p>Ejercicios y problemas</p> <p>1. Calcule en el cuaderno en la forma vertical: (1) 13x3 (2) 27x8 (3) 49x6 (4) 62x5 (5) 51x4 (6) 313x2 (7) 216x3 (8) 115x8 (9) 127x7 (10) 409x5 (11) 816x6 (12) 237x6 (13) 432x7 (14) 123x9 (15) 375x8</p> <p>2. Resuelva los siguientes problemas. (1) Quiero comprar 9 boletos de tren. Cada uno vale 450 pesos. ¿Cuántos pesos necesitaré? (2) La biblioteca de la Municipalidad compra 240 libros al año. ¿Cuántos libros compra en 5 años?</p> <p>3. Descubra el número escondido en cada espacio en blanco. (1) $\begin{array}{r} _4 \\ \times 2 \\ \hline 188 \end{array}$ (2) $\begin{array}{r} _4 \\ \times 3 \\ \hline 1_3 \end{array}$ (3) $\begin{array}{r} _28 \\ \times 3 \\ \hline 38_ \end{array}$ (4) $\begin{array}{r} 22_ \\ \times 4 \\ \hline _00 \end{array}$ (5) $\begin{array}{r} 4_6 \\ \times 5 \\ \hline 203_ \end{array}$</p> <p>4. Invente problemas cuyo procedimiento de operación sea una multiplicación entre un número de 3 cifras y uno de 1 cifra cuyo producto sea de 4 cifras, y resuélvalos.</p>	
<p>Prof. (durante la corrección, cuando viene al caso): ¿Qué relación tienen las palabras "doble", "triple" y "veces" con la multiplicación? Analicemos la situación siguiente: El equipo A de fútbol hizo 3 goles. El equipo B hizo 2 veces los goles que hizo el equipo A. ¿Cuántos goles hizo el equipo B?</p> <p>Alumno 1: El equipo B hizo 6 goles. Alumno 2: El triple de un número es ese número x3. Alumno 3: El equipo A hizo 3 goles, y el B hizo el doble.</p> <p>Prof.: Para saber 2 "veces", 3 "veces"... una cantidad, se utiliza la multiplicación. 3 goles x 2 veces = 6 goles. Se puede decir "doble" y "triple" en vez de 2 veces y 3 veces.</p>	

UNIDAD MULTIPLICACIÓN CON 2 A 4 CIFRAS:

SUBUNIDAD 4: MULTIPLICANDO Y MULTIPLICADOR CON MULTIDÍGITOS (4 SESIONES)

Sesión 1: Descubriendo la multiplicación DU x DU, sin canjes. Página 1 de 1

Objetivo de la Sesión: Multiplicar en forma vertical DU x DU, sin canje.

Pregunta Central: ¿Cómo calcular en multiplicaciones entre números de 2 cifras, sin canje?

Se espera que el alumno descubra que para multiplicar números de 2 cifras por 2 cifras puede usar la forma vertical, resuelva ejercicios y problemas.

Situación Problema: Hay 13 alumnos en la sala y cada uno construye 21 barcos de papel en una sesión de origami. ¿Cuántas hojas de papel (lustre) para origami fueron necesarias?

Prof.: (tras la presentación del problema a tratar): Hagamos una estimación primero. ¿Cuál puede ser el resultado?

Alumno 1: 100

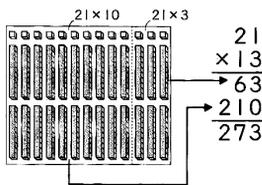
Prof.: Bien (mientras anota las predicciones con los nombres de sus autores), anotaremos tres predicciones y trabajarán.

Prof.: Escriban la expresión, el procedimiento operatorio.

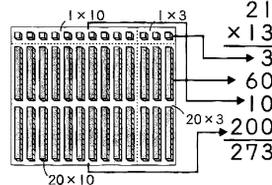
Prof.: (tras dar tiempo para el trabajo individual). Veamos el trabajo realizado. (varios alumnos se ofrecen a salir).

Alumno 1: (explica su trabajo)...

Alumno 1:



Alumno 2:



Ejercicios y problemas

1. Calcule en el cuaderno en la forma vertical:
 - (1) 13x23
 - (2) 21x14
 - (3) 23x32
 - (4) 21x23
2. Resuelva los siguientes problemas.
 - (1) En la repisa hay 32 docenas de huevos. ¿Cuántos huevos hay en total?
 - (2) La biblioteca de la Municipalidad compra 12 colecciones de libros y cada colección trae 21 libros. ¿Cuántos libros compró la biblioteca?

Prof. Trabajen el primer ejercicio y luego corregimos.

Puntos a considerar.

Cálculo vertical de la multiplicación DU x DU.

Orientar hacia el resultado, con una estimación.

Establecer el procedimiento operatorio.

Explorar una forma de resolución.

Hacer que los alumnos muestren distintas formas de resolver el problema recurriendo a la forma vertical y que propongan una forma ordenada de hacerlo.

Practicar y aplicar el conocimiento nuevo.

Resolver: Ejercicios y Problemas de aplicación.

UNIDAD MULTIPLICACIÓN CON 2 A 4 CIFRAS:

SUBUNIDAD 4: MULTIPLICANDO Y MULTIPLICADOR CON MULTIDÍGITOS (4 SESIONES)

Sesión 2: Descubriendo la multiplicación DU x DU, con canjes. Página 1 de 2

Objetivo de la Sesión: Multiplicar en forma vertical DU x DU, con canje.

Pregunta Central: ¿Cómo calcular en multiplicaciones entre números de 2 cifras, con canje?

Se espera que el alumno descubra que para multiplicar números de 2 cifras por 2 cifras con canje también puede usar la forma vertical, resuelva ejercicios y problemas.

Situación Problema 1: Hay 23 alumnos en la sala y cada uno construye 26 tulipanes en una sesión de origami. ¿Cuántas hojas de papel (lustre) para origami fueron necesarias?

Prof.: Piensen en cómo calcular estos problemas en la forma vertical 26×23 y 18×27 .

Alumno 1: Propone multiplicar primero por las unidades y luego por las decenas del multiplicando.

Prof.: Bien, escriban el procedimiento operatorio y resuelvan (tras dar tiempo para el trabajo individual). Veamos el trabajo realizado (varios alumnos desean mostrar su trabajo).

① 26×23

	2	6
×	2	3
	7	8
5	2	

← 26×3

← 26×20

← 26×23

② 18×27

	1	8
×	2	7

← 18×7

← 18×20

← 18×27

Alumno 1: (explica su trabajo) ...

Ejercicios

Calcule en el cuaderno en la forma vertical:

- (1) 16×24 (2) 27×32 (3) 15×12 (4) 21×14
 (5) 36×23 (6) 17×57 (7) 27×24 (8) 15×38

Profesor: ¿Qué significa el 52? ¿52 grupos de...?

Profesor: Practiquemos estos problemas en la forma vertical.

Alumnos realizan los ejercicios en sus cuadernos. Algunos salen a la pizarra. Alumnos comparan procesos y resultados.

Profesor puede insistir preguntando por el significado del segundo producto parcial.

Puntos a considerar.

Cálculo vertical de la multiplicación DU x DU, con canjes en las decenas.

Orientar hacia el resultado, con una estimación.

Establecer el procedimiento operatorio.

Explorar la forma de resolución.

Hacer que los alumnos resuelvan el problema recurriendo a la forma vertical y que propongan una forma ordenada de hacerlo.

Practicar.

Resolver ejercicios.

<p>UNIDAD MULTIPLICACIÓN CON 2 A 4 CIFRAS: SUBUNIDAD 4: MULTIPLICANDO Y MULTIPLICADOR CON MULTÍDIGITOS (4 SESIONES) Sesión 2: Multiplicación de números de 2x2 cifras con canje Página 2 de 2 Objetivo de la Sesión: Multiplicar en forma vertical DU x DU, con canje. Se espera que el alumno descubra cómo usar la forma vertical para multiplicar números de 2 cifras por 2 cifras con canje en las centenas y resuelva ejercicios.</p>																																									
<p>Situación Problema 2: Hay 58 tarros en cada caja y un total de 46 cajas con tarros. ¿Cuántos tarros hay en total? ¿Y si hubiera 63 cajas con 37 tarros cada uno?</p> <p>Prof.: Piensen en cómo calcular los problemas en forma vertical.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-start;"> <div style="text-align: center;"> <p>① 58×46</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center; width: 100px; height: 100px;"> <tr><td></td><td></td><td>5</td><td>8</td></tr> <tr><td></td><td>×</td><td>4</td><td>6</td></tr> <tr><td colspan="4" style="border-top: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td colspan="4" style="border-top: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td colspan="4" style="border-top: 1px solid black;"></td></tr> </table> <p>→ 58×6 → 58×40 → 58×46</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>② 37×63</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center; width: 100px; height: 100px;"> <tr><td></td><td></td><td>3</td><td>7</td></tr> <tr><td></td><td>×</td><td>6</td><td>3</td></tr> <tr><td colspan="4" style="border-top: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td colspan="4" style="border-top: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td colspan="4" style="border-top: 1px solid black;"></td></tr> </table> <p>→ $37 \times \square$ → $37 \times \square$ → 37×63</p> </div> </div> <p>Situación problema 3: Se requiere 70 trozos de alambre de 35 cm. ¿Cuánto cm de alambre son necesarios?</p> <p>Prof.: Piensen en cómo calcular 35×70 en la forma vertical. Luego, dos saldrán a la pizarra a explicar su idea.</p> <p>Prof.: Escriban el procedimiento operatorio y resuelvan (tras dar tiempo para el trabajo individual). Veamos el trabajo realizado (varios alumnos desean mostrar su forma de resolver).</p> <p>Alumno 1: Veo el 70 como 7 veces 10. Luego multiplico el 35 por 7 y luego multiplico por 10 al total. 35×7 es 245 y al multiplicar por 10 el producto, obtengo 2450.</p> <p>Alumno 2: Como el 70 son 7 decenas y 0 unidades, al multiplicar 0 unidades obtengo 0 en el lugar de las unidades y coloco el cero, y luego multiplico como aprendimos y el producto es 2450.</p> <p>Prof.: Comparen las respuestas de 70×35 y la respuesta de 35×70.</p> <p>Prof.: Escriban estos ejercicios para practicar. Tres alumnos resolverán en la pizarra cada ejercicio, los demás en sus cuadernos. El primero realizará el primer producto parcial, el segundo el segundo producto parcial, y el tercero sumara para obtener el producto final.</p> <p>Alumno 1: (explica su trabajo) ...</p>			5	8		×	4	6															3	7		×	6	3													<p>Puntos a considerar:</p> <p>Cálculo vertical DU x DU, con canjes en las centenas.</p> <p>Orientar hacia el resultado, con una estimación.</p> <p>Establecer el procedimiento operatorio.</p> <p>Explorar la forma de resolución.</p> <p>Hacer que los alumnos resuelvan el problema recurriendo a la forma vertical y que propongan una forma ordenada de hacerlo.</p> <p>Practicar.</p> <p>Resolver ejercicios.</p>
		5	8																																						
	×	4	6																																						
		3	7																																						
	×	6	3																																						
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>Ejercicios</p> <p>Calcule en el cuaderno en la forma vertical</p> <p>(1) 96×44 (2) 77×38 (3) 85×56 (4) 29×14 (5) 46×93 (6) 87×57 (7) 37×54 (8) 65×65</p> </div> <p>Profesor: Practiquemos estos ejercicios en la forma vertical.</p>																																									

UNIDAD MULTIPLICACIÓN CON 2 A 4 CIFRAS:
SUBUNIDAD 4: MULTIPLICANDO Y MULTIPLICADOR CON MULTÍDIGITOS (4 SESIONES)

Sesión 3: Explicaciones a la forma de multiplicar multidígitos. Página 1 de 2

Objetivo de la Sesión: Resolver problemas sobre las formas de multiplicar multidígitos.

Pregunta Central: ¿Es capaz de aplicar la multiplicación de números de multidígitos para resolver enunciados de problemas?

Se espera que el alumno puedan dar explicaciones acerca de la forma de multiplicar números multidígitos, de modo que cumplan las condiciones exigidas.

Situación Problema 1: ¿Cómo explican el cálculo de 45×63 ?
 Yo escribiré cada paso pero de manera incompleta....

1. Sumar a 45×3 el cálculo de $45 \times \underline{\quad}$
 Observen el cálculo en la forma vertical

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 63 \\ \hline 135 \leftarrow (a) \\ 270 \leftarrow (b) \\ \hline 2835 \end{array}$$

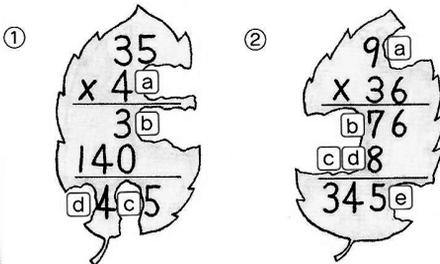
2. El producto parcial "(a)" se obtiene de $\underline{\quad} \times \underline{\quad}$
 3. El producto parcial "(b)" se obtiene de $\underline{\quad} \times \underline{\quad}$ y significa
 270 grupos de $\underline{\quad}$

Problema 2: Profesor (muestra una lámina con dos ejercicios):
 ¿Son correctos los siguientes cálculos en la forma vertical?
 (Luego que ellos han detectado errores, enuncia la siguiente
 tarea). Encuentren los errores y corrijánlos.

Pizarra

$\begin{array}{r} 54 \\ \times 94 \\ \hline 206 \\ 456 \\ \hline 4766 \end{array}$	$\begin{array}{r} 48 \\ \times 65 \\ \hline 240 \\ 288 \\ \hline 528 \end{array}$
--	---

Problema 3: Profesor (muestra una lámina con dos hojas):
 Observen la lámina y escriban los números correctos en los
 espacios vacíos.



Los alumnos explican comprensivamente cómo multiplicar en la forma vertical. Las preguntas que surjan pueden contestarlas entre ellos mismos.

El profesor concluye.

Multiplican en la forma vertical correctamente.

Alumnos entienden y buscan el error.

Escriben la expresión multiplicativa y calculan la respuesta.

Entienden el sistema de multiplicación y resuelven problemas.

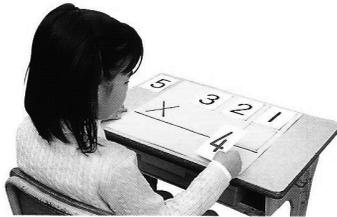
UNIDAD MULTIPLICACIÓN CON 2 A 4 CIFRAS:
SUBUNIDAD 4: MULTIPLICANDO Y MULTIPLICADOR CON MULTÍDIGITOS (4 SESIONES)

Sesión 3: Explicaciones a la forma de multiplicar multidígitos Página 2 de 2

Objetivo de la Sesión: Resolver problemas sobre las formas de multiplicar multidígitos. Se espera que el alumno pueda dar explicaciones acerca de la forma de multiplicar números multidígitos, de modo que cumpla las condiciones exigidas.

Situación Problema: Construir problemas de multiplicación usando tarjetas.

Profesor: Tienen 5 tarjetas con los dígitos 1, 2, 3, 4, y 5. Hagan problemas de multiplicación que tengan respuestas de 4 cifras.



Los alumnos trabajan y el profesor observa el trabajo de los alumnos y evalúa el desarrollo de la clase. Determina qué alumnos irán a la pizarra a explicar sus análisis.

La pizarra queda estructurada como sigue:

1. (número de 3 cifras)x(número de 1 cifra)

	1	2	3
×			4

	3	2	1
×			4

2. (número de 2 cifras)x(número de 2 cifras)

		1	2
×		3	4

		5	3
×		4	1

3. (número de 4 cifras)x(número de 1 cifra)

	1	2	3	4
×				5

	4	3	2	1
×				5

Profesor:
Hagan los problemas de multiplicación cuya respuesta tenga sólo 4 cifras.

Alumno 1: Si el producto del número en las centenas del multiplicando y el multiplicador es un número de 2 cifras, la respuesta tendrá 4 cifras.

Alumno 2: Si el producto de los 2 números en el lugar de las decenas es un número de 2 cifras, la respuesta tendrá 4 cifras.

<p>UNIDAD MULTIPLICACIÓN CON 2 A 4 CIFRAS: SUBUNIDAD 4: MULTIPLICANDO Y MULTIPLICADOR CON MULTIDÍGITOS (4 SESIONES) Sesión 4: Descubriendo la multiplicación CDU x DU. Página 1 de 1 Objetivo de la Sesión: Descubrir como multiplicar CDU x DU usando la forma vertical. Pregunta Central: ¿Cómo multiplicar en forma vertical números de 3 cifras x uno de 2 cifras? Se espera que el alumno pueda explicar cómo extender la forma vertical de 2x2 cifras a 3x2 cifras.</p>	
<p>Situación Problema: Se construye un collar con 137 semillas de sandía. ¿Cuántas semillas se requieren para construir 42 collares de este tipo?</p> <p>Prof.: Escriban la expresión o procedimiento operatorio.</p> <p>Alumno: El procedimiento es 137×42.</p> <p>Prof.: Sean ordenados en su trabajo y procuren hacer uso de la forma vertical para resolver el problema.</p> <p>Prof. (tras dar tiempo para el trabajo individual): Veamos el trabajo realizado. (varios alumnos se ofrecen a salir).</p> <p>Alumno: (realiza el procedimiento en la pizarra y explica su trabajo a sus compañeros).</p> <p>Los estudiantes están atentos a revisar y verificar si su compañero o ellos cometieron un error en el procedimiento. Para ello comparan el resultado final y los resultados parciales.</p> <p>Discuten formas alternativas de hacer los cálculos: de derecha a izquierda o bien de menor a mayor.</p>	<p>Puntos a considerar</p> <p>Cálculo vertical de la multiplicación CDU x DU.</p> <p>Establecer el procedimiento operatorio.</p> <p>Hacer que los alumnos muestren las formas de resolver el problema recurriendo a la forma vertical y que propongan una forma ordenada de hacerlo.</p>

Notas para finalizar:

No se da énfasis a la ejercitación, puesto que este tipo de problemas puede ser enfrentado con calculadoras de manera más eficiente. Los desafíos que quedan a continuación se refieren a:

- a) Cálculos con técnicas para aproximar.
- b) Uso de estrategias variadas para facilitar los cálculos.
 Por ejemplo, transformar 50×32 en 100×16 .

Estos dos desafíos quedan fuera de los propósitos de análisis de este libro. El libro se restringe al estudio de la enseñanza de la multiplicación con naturales, incluyendo las destrezas para el cálculo mental y la enseñanza de procedimientos que ayudan al cálculo mental a resolver problemas de 2 cifras por 2 cifras, recurriendo a la forma vertical. No es necesario que los alumnos ganen destrezas en el algoritmo abreviado.

ANEXO 1

La extensión del concepto de multiplicación

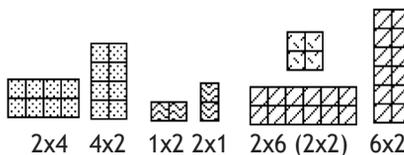
Suma iterada y desagregación

Tradicionalmente se ha enseñado a multiplicar a partir de sumas iteradas. Harel y Confrey (1994) hacen notar que la idea de desagregar o fragmentar (splitting) es una poderosa herramienta para enseñar a multiplicar, la cual favorece la extensión de la multiplicación a los decimales y a las fracciones, proveyendo una mirada geométrica y no sólo aritmética a la multiplicación.

Confrey sostiene que la técnica de fragmentación potencia el trabajo temprano con unidades que no son el singleton, disminuyendo la dificultad que tienen los niños para conceptualizar las razones y las proporciones y otras áreas de las estructuras multiplicativas. Para Confrey, las concepciones apropiadas acerca de las razones y proporciones no se construyen desde la multiplicación como suma repetida, sino como un sistema de numeración paralelo que puede ser desarrollado a partir de una operación de fragmentación. Confrey postula que el fundamento del sistema paralelo lo desarrollan de manera natural los niños, y que la naturaleza de tal sistema podría tener un poderoso efecto en la comprensión de los conceptos multiplicativos. Los niños podrían construir un mundo multiplicativo paralelo a, complementario a, e interdependiente con el mundo aditivo.



Representación de 2×3 usando fragmentación en un diagrama de árbol (Freudenthal).



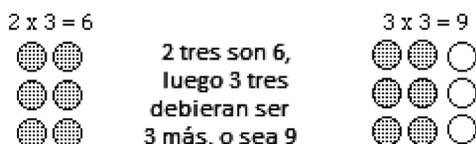
Representación de productos de la tabla del 2 usando fragmentación (Confrey).

Actividades centradas en la visualización de esquemas como los de las figuras de arriba y actividades con plegado de papeles constituyen un contexto en el cual las acciones de los estudiantes son consistentes con la conjetura de fragmentación de Confrey. Estas actividades permiten desarrollar el concepto de multiplicación, consolidando esquemas de acción y operaciones mentales que subyacen y constituyen las estructuras multiplicativas del niño, estructuras cognitivas que contribuyen al razonamiento multiplicativo.

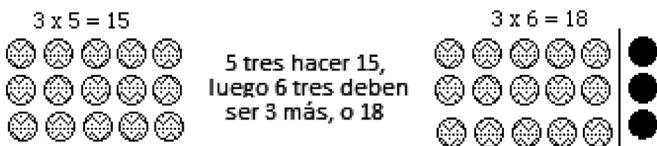
Fragmentación (splitting) para estudiar la tabla del 3

La tabla del tres se introduce generalmente usando el conteo de tres en tres. Sin embargo, como avanzar de tres en tres no es tan fácil para los estudiantes como saltar de dos en dos o de cinco en cinco, se puede usar la estrategia de pensamiento de fragmentación (splitting) para aprender esta tabla. Las situaciones que se proponen (Bohan, H.: http://www.shsu.edu/~ret_hjb/facts.html) hacen uso de los conocimientos previos para alcanzar nuevos conocimientos.

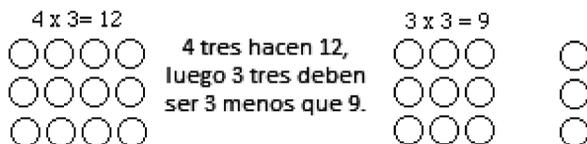
Fragmentación de un producto en partes conocidas



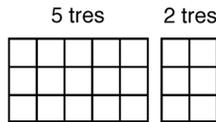
En este ejemplo, el conocimiento de 3×5 ayuda a dar sentido a “ 3×6 .; Si 5 tres hacen 15, ¿cuánto serían 6 tres?”



La misma estrategia se puede utilizar al revés, comenzando con lo sabido, en este caso 4×3 ($2 \times 2 \times 3$) y eliminando una columna. “Si 4 tres hacen 12, ¿cuánto serían 3 tres?”



Aquí, algunos estudiantes pudieron obtener 7×3 pensando "Si 5 tres son 15 y 2 tres son 6, entonces 7 tres deben ser $15 + 6$, o sea 21." Como en los ejemplos anteriores, uno debe guiar el pensamiento con material concreto y abstraer para hacer lo mismo mentalmente.



Los resultados de estos productos se ordenan ahora en la tabla del tres y se procede a variados juegos y actividades con estos datos. Antes de seguir con el estudio de otra tabla, revise lo aprendido por los alumnos y desafíelos a seguir aprendiendo hasta completar todas las tablas, del 2 al 9.

- *Cantidades discretas y cantidades continuas*

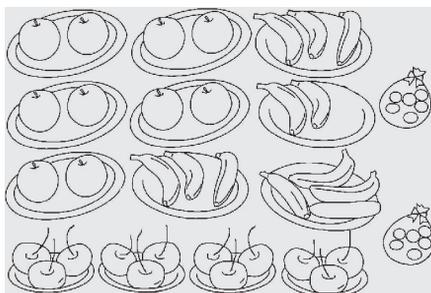
El alumno de 2° grado percibe que se miden los objetos, no los atributos de los objetos. No distingue entre magnitud y medida, digamos, entre la variable y los valores que toma la variable. Incluso el discurso cotidiano de los adultos confunde ambos significados para el término magnitud. En español se habla de magnitudes físicas como longitud y temperatura, y de objetos de gran magnitud como una roca grande. Paulatinamente, el alumno distingue cantidades discretas de las continuas o magnitudes medibles. Las cantidades discretas corresponden a cardinales finitos, elementos del conteo o de la repetición sucesiva de la unidad, elementos del conjunto de los números naturales $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$. Las cantidades continuas son aquellas que se representan por una medida, y que cuando se decide alguna unidad, el número que las representa puede ser cualquier real no negativo: 0, $1/4$, π , 5, entre otros. Las cantidades continuas se conceptualizan en las magnitudes continuas, como por ejemplo la longitud, el peso, la capacidad, el tiempo, etc. Las magnitudes continuas representan las características cuantitativas de las sustancias que mantienen su esencia al dividir la unidad. Por ejemplo, si se tiene 1 litro de leche y se decide como unidad el mililitro, entonces el número se convierte a 1000 mililitros manteniéndose la cantidad.

Las situaciones planteadas en los textos escolares de 2° grado en Japón son al inicio preferentemente discretas. Luego, con la ampliación del ámbito numérico a los decimales y a las fracciones, variadas situaciones son representadas en la recta real, incluyendo situaciones correspondientes a medidas en el marco de un modelo continuo.

- La multiplicación y la proporcionalidad en la enseñanza japonesa

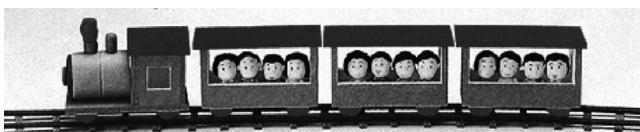
La extensión del significado del número es parte de la secuencia de la currícula de todos los países. La idea clave en Japón para dar sentido a la multiplicación ante la extensión de los números es la proporcionalidad, incluso aunque el profesor no enseñe a los niños la definición formal de proporción. Tradicionalmente, desde los años 1960, la multiplicación/proporcionalidad se desarrolla conforme a la siguiente secuencia en los textos de estudio japoneses.

los textos escolares japoneses introducen la idea de “el número que es al total de los grupos iguales” a partir de la siguiente situación:

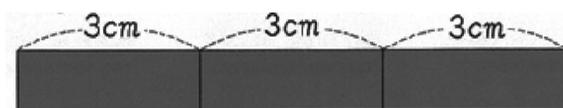


Aquí, en el caso de los plátanos, para desarrollar la idea de los mismos grupos, los niños tienen que mover un plátano a otro plato.

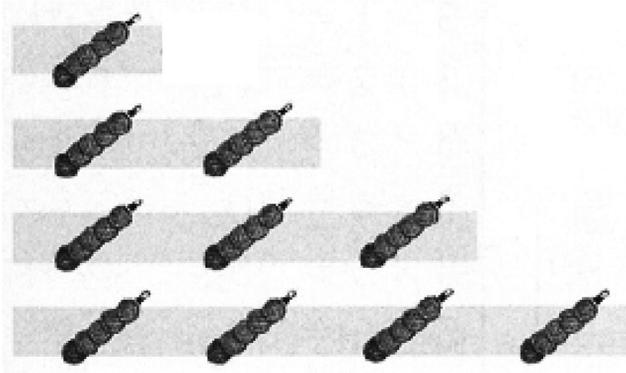
En el caso del texto de la editorial Tokyo Shoseki, la multiplicación es definida por medio de la siguiente situación (Grado 2 - B, p.16) usando números discretos: carros de un tren llevando igual cantidad de pasajeros.



Luego, la palabra “bai” (veces) es introducida por medio de una situación que alude a cantidades continuas o no discretas (Grado 2 B, p. 18): al largo de trozos de cinta, que guarda cierta similitud visual con los vagones de un tren.

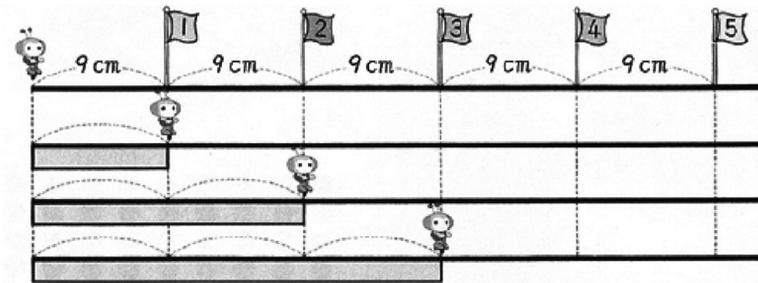


La situación con números continuos (que representan cantidades continuas) y la situación con números discretos se vinculan a partir de la siguiente situación que fue representada por el número de naranjas (Grado 2 - B, p. 19).



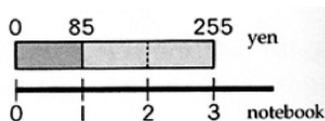
Nota: En los supermercados de Japón es habitual verlas hilas de naranjas en mallas.

En la parte final de la multiplicación en 2º grado, podemos ver las rectas numeradas que implican la proporcionalidad (Grado 2 - B, p. 38).

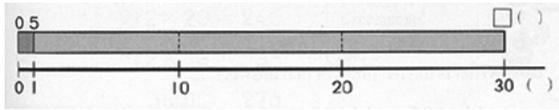


Dependiendo de los niveles, el número de líneas para representar la proporcionalidad cambia como sigue. Para la extensión de la multiplicación desde los números naturales a los decimales, se usan rectas numéricas y la idea es la misma que la definición geométrica de Descartes: aquí, "multiplication is the number of the unit", esto es, "la multiplicación es el número de veces que se repite el valor de la unidad"

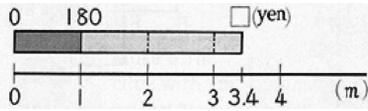
(Grado 3 _ B p. 47).



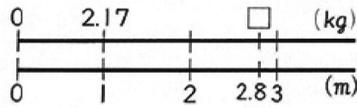
Grado 4-A, p. 78:



Grado 5 - A, p. 26:



Grado 5 - A, p. 29

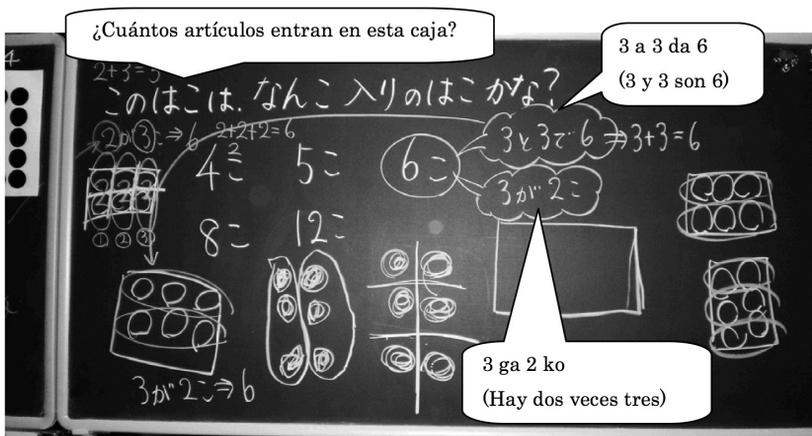


ANEXO 2

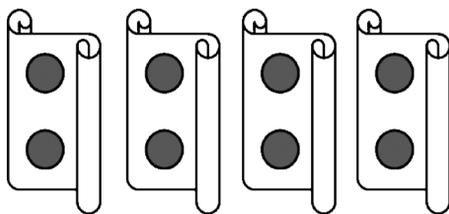
Diferencias gramaticales en la notación matemática

En cuanto al uso del término “veces”

Los estudiantes en Japón aprenden matemáticas a partir de la lengua japonesa, la cual difiere en su gramática de la española. De allí que la notación japonesa de la multiplicación, multiplicando por multiplicador (N xj M), lleve generalmente a confusión a los hispanohablantes. Efectivamente, La diferencia principal en la forma de enseñar a multiplicar en Japón y en Chile viene de la diferencia de lenguas.



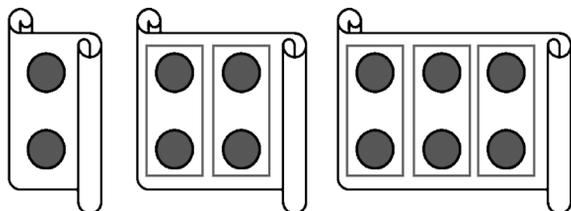
En español se utiliza la palabra “veces” para contar el número de grupos (unidades). La figura siguiente es una representación de cuatro platos (unidad o grupo). Cada plato (unidad o grupo) tiene dos dulces, esto es “cuatro veces dos” y se codifica en Chile (español) bajo la expresión matemática “4 x 2”. En Japón, la situación referida a los 4 platos se representa con la expresión verbal “2 ga 4 ko” o “2 no 4 ko bun”, la cual se codifica con la expresión matemática “2 x 4”.



En Chile, mucha gente no se siente incómoda si esta situación se escribe “ 2×4 ”, como en el idioma japonés. Por su lado, los profesores de educación primaria japoneses sólo permiten que sus estudiantes codifiquen la situación con la expresión “ 2×4 ” y no permiten la representación “ 4×2 ” como en el español. Ello es así, porque los profesores japoneses intentan que los estudiantes desarrollen el significado matemático por sí mismos a partir de la situación, y a ellos se les enseña el idioma japonés con su gramática formal. Para que los estudiantes elaboren las definiciones, tienen que analizar las situaciones y formularlas en su lenguaje cotidiano, el japonés.

La definición de la multiplicación no se limita a la enseñanza de la multiplicación. Para que los alumnos sean capaces de definir la división tienen que utilizar la idea de la multiplicación. Los profesores tienen que identificar con exactitud la relación entre la situación y la expresión matemática de la multiplicación. Pues ello les permitirá adoptar la expresión para desarrollar la definición de las dos situaciones para la división, las situaciones para el área, las situaciones para la proporción y para otras más adelante. Si los estudiantes no pueden usar su lenguaje cotidiano, no pueden llegar a representar matemáticamente la situación por sí mismos.

Basados en esta diferencia idiomática, la misma figura da cabida al desarrollo de diferentes codificaciones o representaciones por medio de expresiones matemáticas.



Representación verbal de la situación usando lengua española (y expresión matemática)

1 vez 2 ($1 \times 2 = 2$) 2 veces 2 ($2 \times 2 = 2+2 = 4$) 3 veces 2 ($3 \times 2 = 2+2+2 = 6$)

Usando el idioma japonés, las mismas ideas se anotan como sigue:

2 ga 1 ko ($2 \times_1 1 = 2$) 2 ga 2 ko ($2 \times_2 2 = 2+2 = 4$) 2 ga 3 ko ($2 \times_3 3 = 2+2+2 = 6$)

Así, del japonés se llega a la expresión $2 \times_3 3$, que leída en español usando el término “veces” es “tres veces dos”. Por otro lado, también el símbolo “x” se puede leer “por” en el contexto del procedimiento de cálculo.

En el caso de “por”

En Japón, se espera que todos los estudiantes recuerden la tabla de multiplicar. Cuando ellos se inician en la multiplicación con una situación del tipo “2 veces 3”, aprenden que esto es “3 ga 2 ko”, escribiéndolo “3 x_j 2” y aprenden a leerlo “3 kakeru 2 ha 6”. Para memorizar la tabla, los profesores comprimen la expresión en “3 kake 2 ha 6”, comprensión de la lectura característica de la lengua japonesa. Una vez que los estudiantes memorizan la tabla de multiplicar, de 1×1 a 9×9 , no necesitan considerar la adición repetida para alcanzar la respuesta a la multiplicación y no les es necesario imaginar situaciones para calcular. Los estudiantes encuentran una de las características de la tabla de multiplicar, la conmutatividad en ella. En el contexto del cálculo, una vez que los estudiantes han memorizado la tabla y aprendido la conmutatividad, los profesores japoneses y los estudiantes no consideran la diferencia entre 2×3 y 3×2 , porque utilizan estas expresiones simplemente sin tener en cuenta la idea de veces ni las situaciones para calcular.

Sin embargo, en el contexto de la resolución de problemas partiendo de una situación, los profesores y los estudiantes japoneses mantienen la distinción entre el multiplicando y el multiplicador porque están pensando en la situación con la idea de unidad (grupo) que se repite.

Problemática de la notación en el contexto del idioma español

En el contexto de los hispanohablantes, si codificamos la situación usando el término “veces” (multiplicador x multiplicando), entramos en contradicción con el sentido originario del término “por”, que indica “multiplicado por” (multiplicando por multiplicador. Lo que está asociado a una inconsistencia entre la suma iterada y la tabla de multiplicar.

Situación 1	Añadición iterada	VS	Tabla	Situación 2
	$1 \times 2 (=2)$	VS	$2 \times 1 (=1+1)$	
	$2 \times 2 (=2+2)$	VS	$2 \times 2 (=2+2)$	
	$3 \times 2 (=2+2+2)$	VS	$2 \times 3 (=3+3)$	
	$4 \times 2 (=2+2+2+2)$	VS	$2 \times 4 (=4+4)$	
	$5 \times 2 (=2+2+2+2+2)$	VS	$2 \times 5 (=5+5)$	
	$6 \times 2 (=2+2+2+2+2+2)$	VS	$2 \times 6 (=6+6)$	
	$7 \times 2 (=2+2+2+2+2+2+2)$	VS	$2 \times 7 (=7+7)$	
	$8 \times 2 (=2+2+2+2+2+2+2+2)$	VS	$2 \times 8 (=8+8)$	
	$9 \times 2 (=2+2+2+2+2+2+2+2+2)$	VS	$2 \times 9 (=9+9)$	

Si usted es hispanohablante y no siente ninguna contradicción, usted puede estar leyendo “x” como “por” basado en la conmutatividad. Si lee la situación con el término “veces”, la codificación no coincide con el sentido del multiplicador y el multiplicando según la expresión “multiplicado por”. El profesor japonés distingue claramente la diferencia porque él intenta desarrollar a los estudiantes de modo que ellos puedan construir la idea de la multiplicación y de la división desde la situación. Muchos países, en los que se origina la misma contradicción que en Chile, introducen generalmente la conmutatividad antes que en Japón para evitar la contradicción.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Baldor, A. (1950). *Aritmética. Teórico practica*. Publicaciones Cultural. México.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), 221-266.
- Curriculum Planning and Development Division. Ministry of Education, Singapore. (2006). *Mathematics Syllabus Primary*. Singapore.
- de Ulloa, P. (1706). *Elementos Matemáticos*. Tomo I. Madrid: Antonio González de Reyes, Impresor.
- Ferrer, J. (2005). Aspectos del Currículum Prescrito en América Latina: Revisión de tendencias contemporáneas en currículum, indicadores de logro, estándares y otros instrumentos. University at Albany State University of New York. PREALC.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. D. Reidel. Publishing Company.
- García, G. (2008). Matemáticas en el Sistema Educativo Colombiano. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. N 13 pp. 79 - 99, Marzo.
- Gobierno de México (1993). Programas de Estudio de Matemáticas recuperado de <http://www.seg.guanajuato.gob.mx/Institucional/Normatividad/educativo/EA3-4.htm>
- Gobierno del Perú (2005). *Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular*. DINEIP - DINESST. Lima, noviembre 2005.
- Harel, G. y Confrey, J. Eds. (1994). *The development of Multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. State University of Albany N.Y Press.
- Heeffer, A. (2007). *Mathematics Education through Lesson Study in the Asia Pacific*. Math Region, Conference Report 16 to 20 August. Khon Kaen, Thailand. Plan de clases en: http://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec2007/lesson_plans/Takao_Seiyama.pdf
- Hironaka, H y Sugiyama Y. (2006). *Mathematics for Elementary School 2 A*. Tokyo Shoseki. Tokyo, Japan.

"Este libro presenta una excelente oportunidad de adentrarnos en el fascinante mundo de la educación matemática en Japón, y en especial en el tratado de uno de los temas centrales en la enseñanza básica: la multiplicación. Los autores describen con maestría cómo un tema que muchos de nosotros enseñamos mecánicamente ofrece otra oportunidad para resolución de problemas y para estimular la construcción activa del conocimiento por parte de los alumnos. Además se nos presenta cómo el enfoque japonés deja de lado la nociva dicotomía entre lo procedural y lo conceptual, para integrar ambos aspectos sin preferenciar a ninguno en particular. Celebro esta valiosa contribución a la comunidad hispanoparlante de educación matemática."

Ph. D. Abraham Arcavi
Instituto Weizmann de Ciencias
Israel



www.euv.cl



LA ENSEÑANZA DE LA MULTIPLICACIÓN • Masami Isoda y Raimundo Olfos

EL ESTUDIO DE CLASES Y
LAS DEMANDAS CURRICULARES

La Enseñanza de la Multiplicación

Masami Isoda y Raimundo Olfos



Ediciones Universitarias de Valparaíso
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

MASAMI ISODA es profesor adjunto de la Universidad de Tsukuba, Japón; Director de la Sociedad de Educación Matemática de Japón; su disciplina principal en Educación matemática es Matemática desde la Perspectiva Histórica. Su área de trabajo más importante en la actualidad es de cooperación educativa para los países en vías de desarrollo. Él ha estado manejando tres proyectos nacionales por el Ministerio de Educación en Japón y un proyecto internacional por la cooperación económica de Asia y del Pacífico (APEC), y ha estado vinculado a proyectos por la JICA para siete países en vías de desarrollo.

RAIMUNDO OLFOS AYARZA es profesor Adjunto de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Secretario General de la Sociedad Chilena de Educación Matemática y Director del Centro de Investigación en Didáctica de la Matemática IREM-PUCV. Sus áreas de especialización en Educación Matemática son Pensamiento Numérico y Algebraico, Desarrollo Curricular y Formación de Profesores. Es revisor en las publicaciones periódicas Journal for Research in Mathematic Education (NCTM), Revista UNION Iberoamericana en Educación Matemática y director de la Revista Chilena de Investigación en Educación Matemática.



“Este libro presenta una excelente oportunidad de adentrarnos en el fascinante mundo de la educación matemática en Japón, y en especial en el tratado de uno de los temas centrales en la enseñanza básica: la multiplicación. Los autores describen con maestría cómo un tema que muchos de nosotros enseñamos mecánicamente ofrece otra oportunidad para resolución de problemas y para estimular la construcción activa del conocimiento por parte de los alumnos. Además se nos presenta cómo el enfoque japonés deja de lado la nociva dicotomía entre lo procedural y lo conceptual, para integrar ambos aspectos sin preferenciar a ninguno en particular. Celebro esta valiosa contribución a la comunidad hispanoparlante de educación matemática.”

Ph. D. Abraham Arcavi
Instituto Weizmann de Ciencias
Israel

